

Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017



- 1 Einführung
- 2 Wahrscheinlichkeit: Definition und Interpretation
- 3 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
- 4 Zufallsgrößen
- 5 Spezielle Zufallsgrößen
- 6 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 7 Genzwertsätze
- 8 Statistische Inferenz: Punktschätzer
- 9 Statistische Inferenz: Konfidenzintervalle
- 10 Statistische Inferenz: Statistische Tests

„Behauptung einer Tatsache, deren Überprüfung noch aussteht“
(Leutner in: Endruweit, Trommsdorff: Wörterbuch der Soziologie, 1989).

Statistischer Test: Überprüfung von Hypothesen anhand einer Stichprobe

Idealtypische Vorgehensweise

Wissenschaftlicher Fortschritt durch Falsifikation von Hypothesen

SchlieÙe von Stichprobe oder Experiment auf Grundgesamtheit bzw. Allg. Gesetz

Vorgehen:

- Inhaltliche Hypothese aufstellen
- Operationalisierung
- Inhaltliche Hypothese in statistische Hypothese „Übersetzen“
- Statistischer Test

- **Statistische Tests:**
Die am häufigsten verwendete Art statistischer Inferenz
- **Statistische Signifikanz:**
Zentrales Argument bei vielen empirischen Arbeiten
- **Voraussetzung für Testverfahren:**
Zufallsstichprobe oder Experiment

Ist ein beobachtetes Phänomen in Stichproben ein **reines Zufallsprodukt** oder **mit großer Sicherheit** auf einen **realen Effekt** zurückzuführen?

→ Dazu notwendig:

Formale Entscheidungsregel = Statistischer Test

Beispiel: Münzdrehen (2€)

Zeitungsberichte: 2€ Münzen nicht „fair“



Münzhypothese

- Vermutung:
2€- Münze nicht fair
- Überprüfung: 10-Mal die Münze werfen, Anzahl „Zahl“ notieren

Mögliche Ergebnisse des Experiments

- 5-Mal "Zahl"
→ deutet nicht auf eine unfaire Münze hin
- 10-Mal "Zahl"
→ verdächtig, die Münze ist vermutlich nicht fair
- 0-Mal "Zahl"
→ verdächtig, die Münze ist vermutlich nicht fair
- 8-Mal "Zahl"
→ ?? mehr Zahlwürfe als erwartet. **Zufall? Oder Münze nicht fair?**

Münzhypothese

- Vermutung:
2€- Münze nicht fair
- Statistische Formulierung:
 X Bernoulli-Variable

$$X = \begin{cases} 1 & \text{"Zahl"} \\ 0 & \text{"Adler"} \end{cases}$$

- Wahrscheinlichkeit für Zahl

$$\pi = P(X = 1)$$

- „Die Münze ist nicht fair“ heißt

$$\pi \neq 0.5$$

Überprüfung der Münzhypothese

- Experiment: Wir werfen $n = 10$ -Mal die Münze

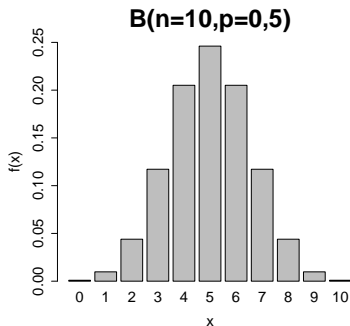
$$\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n = 10, \pi)$$

- Welche Ergebnisse sind wahrscheinlich, falls die Münze fair ist?
- **Falls die Münze fair ist**, so ist die Anzahl „Zahl“ binomialverteilt mit $p = 0.5$.

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim B(n = 10, \pi = 0.5)$$

- **Falls die Münze fair ist**, so sollte $\sum_{i=1}^{10} X_i$ mit einer Wahrscheinlichkeit von **95 %** nicht weit entfernt vom Erwartungswert 5 liegen.

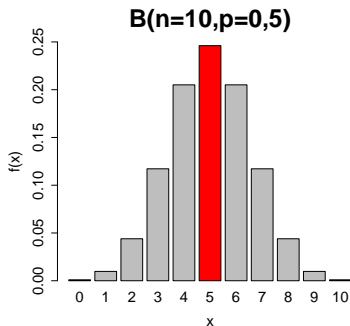
Binomialverteilung



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001

$$\Sigma =$$

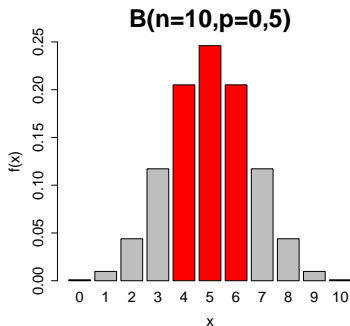
Binomialverteilung



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246 0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001

$$\Sigma = 0.246$$

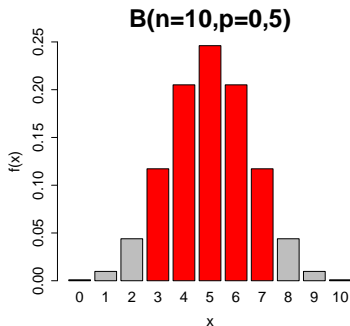
Binomialverteilung



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001

$$\Sigma = 0.656$$

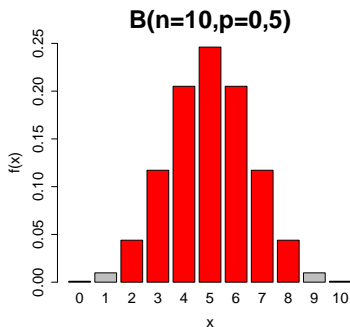
Binomialverteilung



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001
				0.117	0.205	0.246	0.205	0.117			

$$\Sigma = 0.890$$

Binomialverteilung



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001
			0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044		

$$\Sigma = 0.978$$

Münzhypothese

- Falls die Münze fair ist, so liegt die Anzahl "Zahl" bei $n = 10$ Würfeln mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% im Bereich

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

- Falls die Anzahl "Zahl" im Bereich $\{0, 1, 9, 10\}$ liegt, kann dies zwei Ursachen haben.
 - Ein sehr unwahrscheinliches Ereignis ist eingetreten.
 - Unsere Annahme, dass die Münze fair ist, stimmt nicht.

Entscheidungsregel, statistischer Test

Falls die Anzahl "Zahl" im Bereich $\{0, 1, 9, 10\}$ liegt, verwerfen wir die Vermutung, dass die Münze fair ist und gehen davon aus, dass die Münze nicht fair ist.

Statistischer Test: Hypothese

Statistischer Test

Untersuchung, ob man eine Hypothese über die Grundgesamtheit mit Hilfe einer Stichprobe widerlegen kann.

- **Nullhypothese** H_0 = Hypothese, die widerlegt werden soll.
Beispiel: Die Münze ist fair

$$H_0 : \pi = 0.5$$

- **Gegenhypothese** H_1 = Alternative zur Nullhypothese.
Beispiel: Die Münze ist nicht fair

$$H_1 : \pi \neq 0.5$$



Statistischer Test: Prüfgröße, Teststatistik

- Eine Prüfgröße (Teststatistik) T ist eine zufällige Größe,
 - 1 anhand der wir entscheiden, ob die Nullhypothese H_0 plausibel ist.
 - 2 deren Verteilung wir kennen, falls die Nullhypothese H_0 zutrifft.
- Beispiel: Anzahl "Zahl" bei $n = 10$ Würfeln. Unter H_0 gilt:

$$T = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim B(n = 10, \pi = \mathbf{0.5})$$

Statistischer Test: Annahme- und Ablehnbereich

- Der **Annahmereich** des Tests ist der Bereich, in dem die Prüfgröße T mit einer hohen Wahrscheinlichkeit (mindestens $1 - \alpha$) liegt.
Beispiel: $\alpha = 0.05$ und

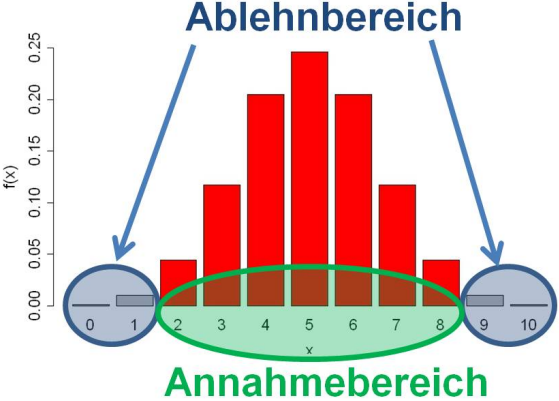
$$\text{Annahmereich} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

- α heißt das **Signifikanzniveau** des Tests.
- Der **Ablehnbereich (kritische Bereich)** ist der Bereich, in dem die Prüfgröße T mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit (höchstens α) liegt.
Beispiel: $\alpha = 0.05$ und

$$\text{Ablehnbereich} = \{0, 1, 9, 10\}$$



Beispiel Annahme- und Ablehnbereich



Statistischer Test: Experiment und Entscheidung

Wir ziehen eine Stichprobe und berechnen den Wert der Teststatistik T .

- 1. Fall:** Der Wert der Teststatistik liegt im Annahmereich.
—→ Wir behalten die Nullhypothese H_0 bei.
- 2. Fall:** Der Wert der Teststatistik liegt im Ablehnbereich.
—→ Wir lehnen die Nullhypothese H_0 zugunsten der Gegenhypothese H_1 ab.



Festlegung des Signifikanzniveaus α

Beim Testen sind folgende Entscheidungen möglich:

H_0 : ablehnen oder H_0 : beibehalten

Damit sind zwei verschiedene Arten von Fehlern möglich:

Wahrheit Aktion	H_0 beibehalten	H_0 ablehnen
H_0 wahr	✓	Fehler 1. Art
H_0 falsch	Fehler 2. Art	✓

Man kann nicht beide Fehlerwahrscheinlichkeiten gleichzeitig kontrollieren! (Tradeoff!)

⇒ asymmetrische Vorgehensweise:

Der Fehler 1. Art wird kontrolliert durch die Angabe einer Obergrenze α („Signifikanzniveau“)

Übliche Werte für den Fehler erster Art sind:

$$\alpha = 0.1, \quad \alpha = 0.05, \quad \alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.001$$

- Implizit wird also der Fehler 1. Art als schwerwiegender betrachtet.
- „konservative Perspektive“: Nullhypothese erst ablehnen, wenn wirklich nicht mehr mit den Daten verträglich.
- z.B. in der Medizin: H_0 : keine Wirkung.
⇒ Nur wenn die Wirkung des Medikaments überzeugend ist, soll es zugelassen werden.

Fehler 1. Art (α -Fehler):

- Die Nullhypothese wird abgelehnt, obwohl sie in Wirklichkeit richtig ist. Z.B.: Man behauptet, es bestünde ein Zusammenhang, obwohl in Wirklichkeit kein Zusammenhang besteht.
- Der Fehler 1. Art soll klein sein (üblich sind 5% oder 10%). Allerdings kann man nicht fordern, dass der Fehler 1. Art bei 0% liegen soll, sonst würde man die Nullhypothese nie ablehnen können.
⇒ Fehler 2. Art

Fehler 2. Art (β -Fehler):

- Die Nullhypothese wird beibehalten, obwohl sie in Wirklichkeit falsch ist.
- Ein guter statistischer Test garantiert bei einem vorgegebenen niedrigen Signifikanzniveau (als Schranke für den Fehler 1. Art) auch einen möglichst geringen Fehler 2. Art.

Folgerungen

- Die Nullhypothese wird höchstens mit Wahrscheinlichkeit α fälschlicherweise verworfen.
- Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art können wir nicht kontrollieren.



Ungleichbehandlung beider Fehlerarten
→ Grund für Formulierung eigentlicher Forschungsfrage
als statistische Alternative:
Entscheidung für H_1 durch α statistisch abgesichert!

Veranschaulichung

- Ein Angeklagter steht vor Gericht.
- Hypothesen
 H_0 : „Angeklagter ist unschuldig“
und
 H_1 : „Angeklagter ist schuldig“
- Urteil: schuldig/nicht schuldig
- H_0 und H_1 sind so formuliert, da das Gericht die Schuld des Angeklagten beweisen muss, und nicht der Angeklagte seine Unschuld.



- Fehler 1. Art: Unschuldiger wird verurteilt
- Fehler 2. Art: Schuldiger wird nicht verurteilt

p-Wert

Der **p-Wert** ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Testgröße

- den beobachteten Wert oder einen noch extremeren Wert („weiter weg von H_0 “) annimmt
- unter der Bedingung, dass H_0 wahr ist.

Bemerkungen

- 1 Für die Berechnung der p -Werte benötigt man eine Statistik-Software oder Tabellen.
- 2 Viele Statistik-Programme geben als Ergebnis eines statistischen Tests nur den p -Wert aus.

p-Wert Bestimmung: Zweiseitiger Test

- $P_{H_0}(10 \text{ Zahl}) + P_{H_0}(0 \text{ Zahl}) = 0.002$
10 Zahl \Rightarrow p-Wert 0.002
- $P_{H_0}(9 \text{ Zahl}) = 0.01$
 $\rightarrow P_{H_0}(\text{mindestens 9 Zahl oder höchstens 1 Zahl})$
 $= 0.001 + 0.01 + 0.01 + 0.001 = 0.022$
9 Zahl \Rightarrow p-Wert = 0.022
- $P_{H_0}(8 \text{ Zahl}) = 0.044$
 $\rightarrow P_{H_0}(\text{mindestens 8 Zahl oder höchstens 2 Zahl})$
 $= 2 * (0.001 + 0.01 + 0.044) = 0.110$
8 Zahl \Rightarrow p-Wert = 0.110
- $P_{H_0}(7 \text{ Zahl}) = 0.117$
 $\rightarrow P_{H_0}(\text{mehr als 7 Zahl oder höchstens 3 Zahl})$
 $= 2 * (0.001 + 0.01 + 0.044 + 0.117) = 0.344$
7 Zahl \Rightarrow p-Wert = 0.344

Testentscheidung durch p-Wert

p-Wert und Signifikanzniveau

Die Nullhypothese wird genau dann abgelehnt, wenn der p-Wert kleiner oder gleich α ist.

Das ermöglicht ein direktes Ablesen der Testentscheidung aus entsprechenden Computerprogrammen. Daher wird der p-Wert meist zu den Test angegeben.

Illustration mit R

Je kleiner der p-Wert desto weniger passen die Daten zur Nullhypothese



p-Wert: Interpretation

- Wahrscheinlichkeit betrifft das Auftreten der Daten und nicht die Wahrscheinlichkeit von H_0
- p-Wert ist **kein Maß** für die Stärke des Effekts. Daher sollten Begriffe wie "hochsignifikant" eher vermieden werden.
- Angabe des p-Wertes immer mit Schätzung des Effekts und Konfidenzintervall
- Bei kleinen p-Werten sollte nur $p < 0.001$ o.ä. angegeben werden.



Motivation

Die Prüfung einer statistischen Hypothese H_0 erfolgt mit statistischen Tests.

Ausgangspunkt ist die *Beobachtung* einer Zufallsvariablen in einer *zufälligen Stichprobe* oder einem *Experiment* .

Mittels der daraus gewonnenen *Schätzungen* der unbekannt Parameter will man zu einer *Aussage* über die Glaubwürdigkeit der Hypothese H_0 gelangen.

Definition Hypothesenraum

Der statistische Test stellt eine Methode dar, Verteilungsannahmen über eine Zufallsvariable X anhand einer konkreten Stichprobe zu überprüfen.

Die Menge aller für die Zufallsvariable X in Frage kommenden Verteilungen wird als *Hypothesenraum* Ω bezeichnet. Diese Menge ist vor der Durchführung eines Test festzulegen.

Definition parametrisches Testproblem

Betrachtet man einen Hypothesenraum Ω , der nur Verteilungen *einer* Familie (z.B. Normalverteilung) enthält, so ist die Festlegung von Ω äquivalent zur Festlegung des Parameterraums Θ , der alle möglichen Werte eines Verteilungsparameters θ enthält. In diesem Fall spricht man von einem *parametrischen Testproblem*.

Definition Nullhypothese und Alternative

Bei einem parametrischen Testproblem wird der Hypothesenraum (Parameterraum) in zwei Teilmengen aufgeteilt:

Nullhypothese die zu testende Hypothese, die durch den Test widerlegt werden soll: $H_0 = \{\theta | \theta \in \Theta_0\}$

Alternative diejenige Hypothese, die durch den Test gezeigt werden soll: $H_1 = \{\theta | \theta \in \Theta_1\}$

Dabei gilt stets: $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

Definition Signifikanztest

Ein Test heißt *Signifikanztest*, wenn die Nullhypothese direkt an die Alternative „grenzt“, d.h., wenn die minimale Distanz zwischen beiden Hypothesen gleich Null ist (z.B. $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$).

Definition **Testgröße**

Die Funktion $T(\mathbf{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ der Stichprobenvariablen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ heißt *Testgröße* oder *Prüfgröße*.

Für die konkrete Stichprobe (x_1, \dots, x_n) ergibt sich $t = T(x_1, \dots, x_n)$ als Realisation der Zufallsgröße $T(\mathbf{X})$.

Definition **kritischer Bereich und Annahmebereich**

Der Wertebereich der Zufallsgröße $T(X_1, \dots, X_n)$ wird in zwei Teilbereiche zerlegt:

kritischer Bereich K H_0 wird abgelehnt, falls

$$t = T(x_1, \dots, x_n) \in K$$

Annahmebereich \bar{K} H_0 wird beibehalten, falls

$$t = T(x_1, \dots, x_n) \notin K$$

Definition Fehler 1. und 2. Art

Bei der Durchführung eines statistischen Tests können folgende vier Situationen auftreten:

	H_0 ist richtig	H_0 ist falsch
H_0 wird beibehalten	richtige Entscheidung	<i>Fehler</i> <i>2. Art</i>
H_0 wird abgelehnt	<i>Fehler</i> <i>1. Art</i>	richtige Entscheidung

Definition Signifikanzniveau und Niveau- α -Test

Bei der Konstruktion eines Tests gibt man sich für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art eine Schranke α vor (z.B. $\alpha = 0,05$), die nicht überschritten werden darf.

Diese Schranke bezeichnet man als *Signifikanzniveau* des Tests. Der zugehörige Test heißt dann *Signifikanztest zum Niveau α* oder kurz *Niveau- α -Test*.

ein- und zweiseitige Tests

Fall	Null- hypothese	Alternativ- hypothese	Testproblem
(a)	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	zweiseitig
(b)	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	einseitig
(c)	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	einseitig

allgemeines Vorgehen bei Tests

- 1 Verteilungsannahme über die Zufallsvariable X
- 2 Formulierung von H_0 und H_1
- 3 Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α
- 4 Konstruktion bzw. Wahl einer geeigneten Testgröße $T(X) = T(X_1, \dots, X_n)$ als Funktion der Stichprobenvariablen X
- 5 Wahl eines kritischen Bereichs K mit $P_\theta(T(X) \in K) \leq \alpha$ für alle $\theta \in \Theta_0$
- 6 Berechnung der Realisierung $t = T(X_1, \dots, X_n)$ der Testgröße anhand der konkreten Stichprobe (x_1, \dots, x_n)
- 7 Entscheidungsregel:
 - $t \in K$: H_0 ablehnen, damit H_1 signifikant
 - $t \notin K$: H_0 beibehalten

Testentscheidung mit p -Werten

Beim Einsatz von Statistiksoftware zum Prüfen von Hypothesen werden unsere üblichen Schritte – insbesondere der kritische Wert – nicht angezeigt. Statt dessen wird der konkrete Wert der Teststatistik und der zugehörige **p-value** oder die sog. **Signifikanz** ausgegeben.

Die Testentscheidung lautet dann: H_0 ablehnen, falls der p -value kleiner oder gleich dem vorgegebenem Signifikanzniveau α ist, ansonsten H_0 nicht ablehnen.

Zweiseitiger approximativer Test auf den Anteilswert

- X Bernoulli-Variable mit $\pi = P(X = 1)$.
- Zweiseitige Hypothese über den Anteilswert p

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

$$H_1 : \pi \neq \pi_0$$

- Testgröße: Anteil in der Stichprobe X_1, \dots, X_n

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Stichprobenumfang n ist genügend groß



Zweiseitiger approximativer Test auf den Anteilswert

Hypothesen: $H_0 : \pi = \pi_0$ versus $H_1 : \pi \neq \pi_0$

Testentscheidung zum Signifikanzniveau α

Annahmebereich

$$\pi_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

H_0 wird abgelehnt, falls

$$\hat{\pi} < \pi_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

oder

$$\hat{\pi} > \pi_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

Beispiel: Münzwurf bei Stern TV 2002

- Nullhypothese: $\pi = \pi_0 = 0.5$ („Münze ist fair.“)
- Signifikanzniveau: $\alpha = 0.01$
- $n = 800$ Münzwürfe
→ Normalverteilung
- Annahmebereich

$$\begin{aligned}\pi_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} &= 0.5 \pm z_{1-\frac{0.01}{2}} \cdot \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{800}} \\ &= 0.5 \pm 0.054\end{aligned}$$

- H_0 wird beibehalten, falls: $\hat{\pi} \in [0.454; 0.546]$

Wert bei Stern TV (2002) : 501/800



Dualität Test und Konfidenzintervall

- **Annahmebereich**: Wir behalten H_0 bei, falls die Testgröße $\hat{\pi}$ in der Nähe von π_0 liegt:
- Äquivalente Formulierung über ein **Konfidenzintervall**: Wir behalten H_0 bei, falls π_0 in der Nähe der Testgröße liegt
- Wir behalten H_0 bei, falls π_0 im Konfidenzintervall für den Anteil liegt
- Dabei hängen das Konfidenzniveau γ und das Signifikanzniveau α wie folgt zusammen:
$$1 - \alpha = \gamma$$
- Dies gilt sehr allgemein für zweiseitige Test und Konfidenzintervalle
- Dies Prinzip kann zur Konstruktion von Konfidenzintervallen verwendet werden



Einseitiger Test auf den Anteilswert

- X Bernoulli-Variable mit $\pi = P(X = 1)$.
- Einseitige Hypothese über den Anteilswert π

$$H_0 : \pi \leq \pi_0$$

$$H_1 : \pi > \pi_0$$

- Testgröße: Anteil in der Stichprobe X_1, \dots, X_n

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Stichprobenumfang n ist genügend groß
(Faustregel: $n\pi_0(1 - \pi_0) > 9$)

Einseitiger Test auf den Anteilswert

Hypothesen: $H_0 : \pi \leq \pi_0$ vs. $H_1 : \pi > \pi_0$

Testentscheidung zum Signifikanzniveau α

Annahmebereich

$$\hat{\pi} \leq \pi_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

H_0 wird abgelehnt, falls

$$\hat{\pi} > \pi_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

$z_{1-\alpha}$ ist das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

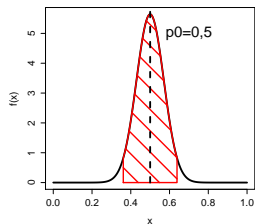
Vergleich einseitige Tests und zweiseitiger Test

Test auf Anteil mit einer Stichprobe der Größe $n = 50$ und Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

$$H_0 : \pi = 0.5$$

$$H_1 : \pi \neq 0.5$$

Annahmehereich

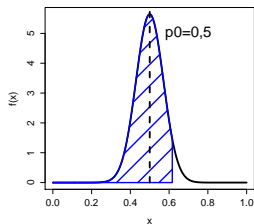


$[0.36; 0.64]$

$$H_0 : \pi \leq 0.5$$

$$H_1 : \pi > 0.5$$

Annahmehereich

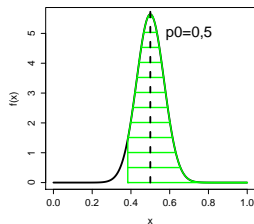


$[0; 0.62]$

$$H_0 : \pi \geq 0.5$$

$$H_1 : \pi < 0.5$$

Annahmehereich



$[0.38; 1]$

- Signifikanztest weiteres zentrales Instrument der statistischen Inferenz
- Konstruktion über Nullhypothese (i.d.R. Gegenteil der Forschungshypothese)
- Statistische Signifikanz entspricht Falsifizierung der Nullhypothese
- Enger Zusammenhang mit Konfidenzintervallen