



- Einführung
- ① Wahrscheinlichkeit: Definition und Interpretation
- ② Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, bedingte Wahrscheinlichkeit**

Axiome nach Kolmogorov

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit Ergebnisraum Ω (Menge der möglichen Ergebnisse)

Axiom 1

Jedem Ereignis A , $A \subset \Omega$ ist eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zugeordnet, die Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Axiom 2

Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1:

$$P(\Omega) = 1.$$

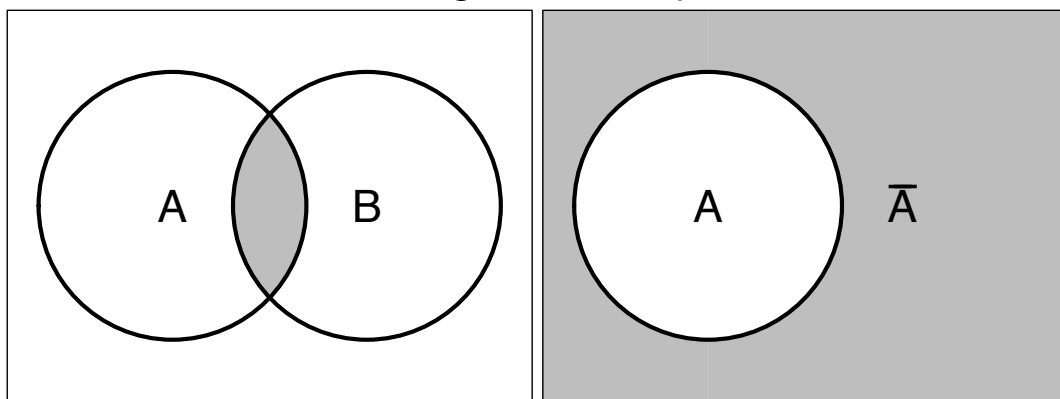
Axiom 3

Sind A_1 und A_2 disjunkte Ereignisse, so ist

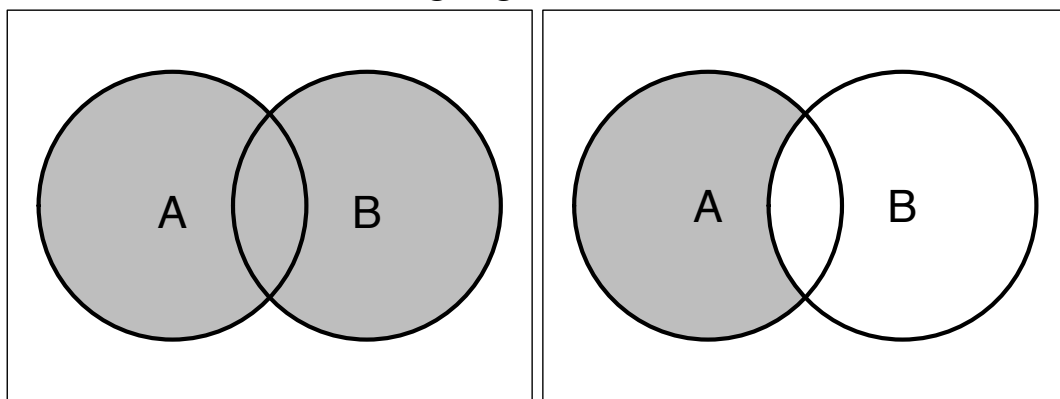
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Venn Diagramme

Veranschaulichung von Wahrscheinlichkeiten durch Flächen :
Schnittmenge und Komplement:



Vereinigung und Differenz



Folgerungen

Folgerung 1

Die Wahrscheinlichkeit für das zu A komplementäre Ereignis \bar{A} ist

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Beweis

$$\begin{aligned} \text{Axiom 2:} \quad & P(\Omega) = 1 \\ & \Leftrightarrow P(A \cup \bar{A}) = 1 \\ \text{Axiom 3} \quad & \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \\ & \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

Folgerungen

Folgerung 2

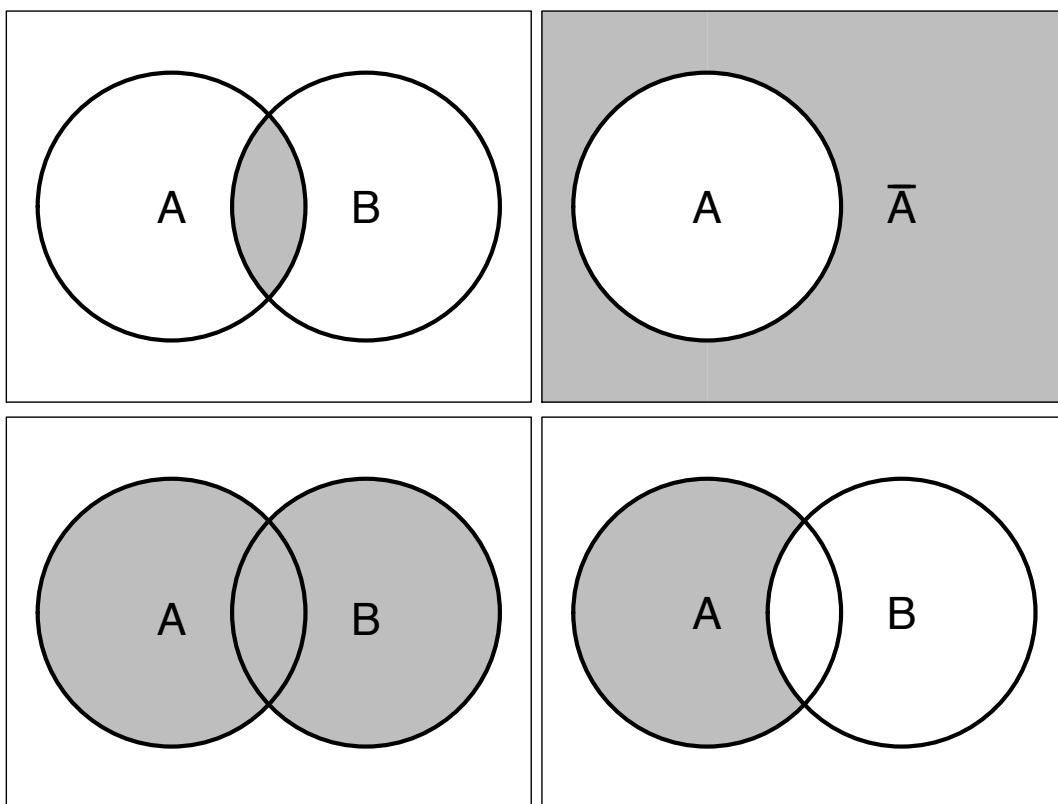
Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses \emptyset ist

$$P(\emptyset) = 0$$

Beweis

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) \stackrel{\text{Folgerung 1}}{=} 1 - P(\Omega) \stackrel{\text{Axiom 2}}{=} 0$$

Venn Diagramme



Folgerungen

Folgerung 3

Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereignissen A_1 und A_2 , die sich nicht notwendig gegenseitig ausschließen, mindestens eins eintritt, ist

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Beweis

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &\stackrel{\text{disjunkte Zerlegung}}{=} P(A_1 \setminus A_2 \cup A_2 \setminus A_1 \cup (A_1 \cap A_2)) \\ &\stackrel{\text{Axiom 3}}{=} P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_1 \cap A_2) \\ &\stackrel{\text{kreative 0}}{=} \underbrace{P(A_1 \setminus A_2) + P(A_1 \cap A_2)}_{P(A_1)} \\ &\quad + \underbrace{P(A_2 \setminus A_1) + P(A_1 \cap A_2)}_{P(A_2)} \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

Folgerungen

Folgerung 4

Für $A \subseteq B$ gilt stets

$$P(A) \leq P(B)$$

Beweis

$$\begin{aligned} & B \stackrel{\text{disjunkte Zerlegung}}{=} A \cup (\bar{A} \cap B) \\ \Rightarrow P(B) &= P(A \cup (\bar{A} \cap B)) \\ \stackrel{\text{Axiom 3}}{\Leftrightarrow} P(B) &= P(A) + \underbrace{P(\bar{A} \cap B)}_{\geq 0 \text{ (Axiom 1)}} \\ \Rightarrow P(B) &\geq P(A) \end{aligned}$$

Folgerungen

Folgerung 5

Sei A_1, \dots, A_n eine vollständige Zerlegung des Ereignisraums Ω in paarweise disjunkte Ereignisse. Für ein beliebiges Ereignis B gilt dann

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

Zusammenfassung

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, falls A_1 und A_2 disjunkt sind
- $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$, falls A_i eine vollständige Zerlegung von Ω bilden

Laplace'sche Wahrscheinlichkeit

Definition Laplace'sche Wahrscheinlichkeit

Liegt ein Zufallsexperiment zugrunde, bei dem

- die Ergebnismenge *endlich* ist und
- alle Ereignisse *gleichwahrscheinlich* sind,

dann bildet der Quotient aus

$$\frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = P(A)$$

die Laplace-Wahrscheinlichkeit.

Die Mächtigkeiten $|A|$ und $|\Omega|$ können z.B. mit Hilfe von kombinatorischen Regeln bestimmt werden.

Ziehen aus einer Grundgesamtheit

Beispiel: Es wird ein Studierender der Vorlesung gezogen und nach seiner Wahlabsicht gefragt.

Dazu nehmen wir an, dass es N Studierende in der Vorlesung gibt und dass sie durchnummeriert sind $n = 1, \dots, N$

$$P(\text{Student Nr } n \text{ wird gezogen}) = 1/N$$

Alle haben die gleiche Ziehungswahrscheinlichkeit.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er/sie ein SPD Wähler ist?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau gezogen wird?

Lösung nach Laplace

- Wahrscheinlichkeit für „SPD-Wähler“

$$\begin{aligned} P(SP D) &= \frac{\text{Anzahl der für } SP D \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} \\ &= \frac{\text{Anzahl der SPD Wähler}}{\text{Anzahl aller Studierenden der Vorlesung}} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also die relative Häufigkeit f_{SPD} der SPD Wähler in der Grundgesamtheit.

- Wahrscheinlichkeit für Frau ?

Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

Die Argumentation des Beispiels gilt ganz allgemein.

$$P(\text{Eine Person mit der Eigenschaft } E \text{ wird gezogen}) = f_E$$

- Die relativen Häufigkeiten/Anteile aus der Grundgesamtheit pflanzen sich also in der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Stichprobe fort.
- Dies ist ganz entscheidend, denn dadurch kann man also durch eine Stichprobe etwas über die Häufigkeitsverhältnisse in der Grundgesamtheit lernen.

Zufallsstichproben

- Ziehung von mehreren n Einheiten aus der Grundgesamtheit
- Ziehung mit und ohne Zurücklegen
- Typischerweise sind Stichproben ohne Zurücklegen praktisch einfacher zu realisieren und zu rechtfertigen.
- Für sehr große Grundgesamtheiten sind die Unterschiede zwischen mit und ohne Zurücklegen verschwindend gering.

Die praktische Umsetzung:

- Mit Hilfe einer nummerierten Liste der Grundgesamtheit Hilfe von Computerprogrammen
- Ersatzmechanismen : Random dialing (Telefon), Random Walks etc.
- **Nicht aufs gerate Wohl.** (Ich spreche Leute an)

Ziehen mit Zurücklegen

- Grundgesamtheit mit N Zahlen $G = \{1, \dots, N\}$.
- Ziehe Stichprobe vom Umfang n **mit** Zurücklegen.
- Zur Beschreibung des Zufallsvorgangs müssen wir die Anzahl der potentiell möglichen Stichprobenergebnisse bestimmen (jede Stichprobe ist gleichwahrscheinlich).
- $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_j \in \{1, \dots, N\}\}$, das selbe Element kann mehrfach vorkommen.
- $|\Omega| = \underbrace{N \cdot N \cdot \dots \cdot N}_{n\text{-mal}} = N^n$, d.h. N^n potentiell mögliche Stichproben vom Umfang n .

Beispiel: Stichprobentheorie

Ziehe Stichprobe vom Umfang n aus Grundgesamtheit von $N=1000$ mit Zurücklegen. Annahme: In Grundgesamtheit sind 300 SPD Wähler

$$n = 1 \quad P(1SPD) = 0.3$$

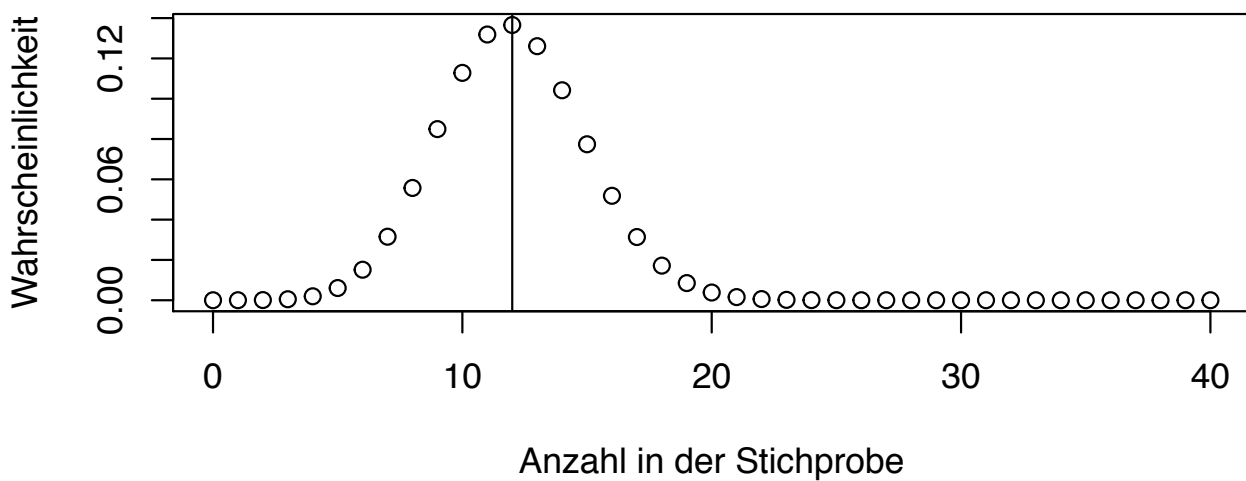
$$n = 2 \quad P(0SPD) = \frac{700 \cdot 700}{1000 \cdot 1000} = 0.49$$

$$P(1SPD) = \frac{300 \cdot 700}{1000 \cdot 1000} \cdot 2 = 0.42$$

$$P(2SPD) = \frac{300 \cdot 300}{1000 \cdot 1000} = 0.09$$

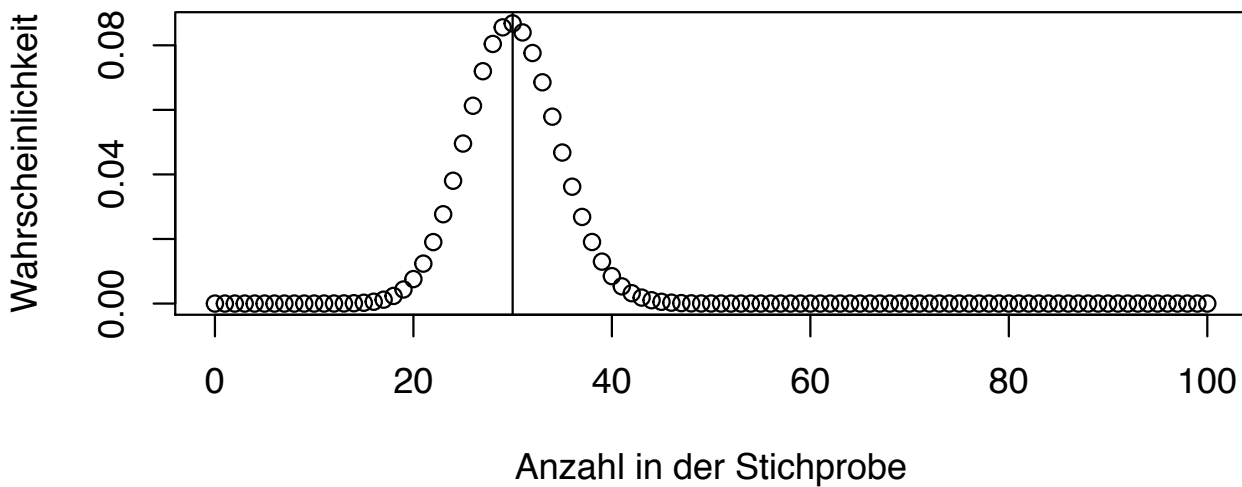
Beispiel: $n=40$

Ziehe Stichprobe vom Umfang n aus Grundgesamtheit von $N=1000$ mit Zurücklegen. Annahme: In Grundgesamtheit sind 300 SPD Wähler
Berechnung für große n mit Hilfe der Binomialverteilung



Beispiel: $n=100$

Ziehe Stichprobe vom Umfang n aus Grundgesamtheit von $N=1000$ mit Zurücklegen. Annahme: In Grundgesamtheit sind 300 SPD Wähler
Berechnung für große n mit Hilfe der Binomialverteilung



Einfache Zufallsstichprobe

Ziehen **ohne** Zurücklegen **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

- Ziehe n Kugeln aus einer Urne mit N nummerierten Kugeln. Die Reihenfolge der Ziehungen spielt keine Rolle, d.h. die Stichprobe „4,1,7“ wird nicht unterschieden von „7,1,4“.
- $\Omega = \{\{\omega_1, \dots, \omega_n\} : \omega_j \in \{1, \dots, N\}, \omega_j \neq \omega_i \text{ für } j \neq i\}$
- Anzahl der Stichproben:

$$|\Omega| = \frac{N!}{(N-n)!n!} = \binom{N}{n}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit I

„Herzoperation in Krankenhaus“

Überleben der Operation

Alle Fälle	Operation überlebt	Operation nicht überlebt	P(nicht ü) „Risiko“
Krankenhaus U	500	500	0.5
Krankenhaus K	900	100	0.1

Frage: „In welchem Krankenhaus würden Sie sich behandeln lassen?“

Bedingte Wahrscheinlichkeit II

Schwere der behandelten Fälle

	schwere Fälle	leichte Fälle
Krankenhaus U	900	100
Krankenhaus K	100	900

Frage: „Bleiben Sie bei Ihrer Entscheidung?“

Bedingte Wahrscheinlichkeit III

Überleben der Operation aufgeteilt nach der Schwere der behandelten Fälle

Schwere Fälle	Operation überlebt	Operation nicht überlebt	P(nicht ü) „Risiko“
Krankenhaus U	400	500	0.56
Krankenhaus K	30	70	0.7

Leichte Fälle	Operation überlebt	Operation nicht überlebt	P(nicht ü) „Risiko“
Krankenhaus U	100	0	0
Krankenhaus K	870	30	0.033

Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

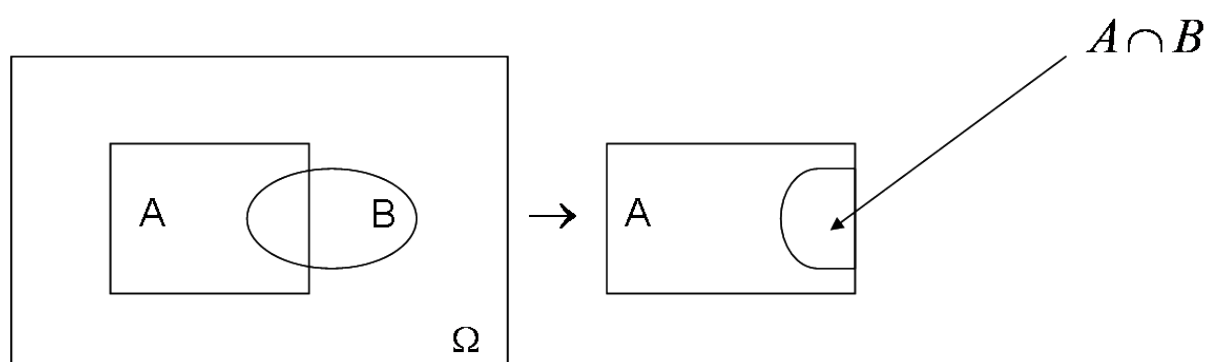
In dem Beispiel betrachten wir das Risiko gegeben „schwerer Fall“. Das Risiko wird berechnet durch

$$\frac{\text{Anzahl (schwere Fälle und nicht überlebt)}}{\text{Anzahl(schwere Fälle)}}$$

Allgemein definieren wir die Wahrscheinlichkeit von „Ereignis B gegeben A“

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Einschränkung des Ergebnisraumes und bedingte Wahrscheinlichkeit



Bedingte Wahrscheinlichkeit: Beispiel

B: Nicht überleben

A: Schwerer Fall

Krankenhaus U

$$P(B) = 500/1000 = 0.5$$

$$P(A) = 900/1000 = 0.9$$

$$P(A \cap B) = 500/1000 = 0.5$$

$$P(B|A) = 0.5/0.9 = 0.56$$

Krankenhaus K

$$P(B) = 100/1000 = 0.1$$

$$P(A) = 100/1000 = 0.1$$

$$P(A \cap B) = 70/1000 = 0.07$$

$$P(B|A) = 0.07/0.1 = 0.7 = 70\%$$

Schwere Fälle	OP überlebt	OP nicht überl.	P(nicht ü) „Risiko“
Krankenh U	400	500	0.56
Krankenh K	30	70	0.7

Leichte Fälle	OP überlebt	OP nicht überl.	P(nicht ü) „Risiko“
Krankenh U	100	0	0
Krankenh K	870	30	0.033

Beispiel: Würfeln

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \\ A &= \{2,4,6\} \quad \text{„gerade“} \\ B &= \{4,5,6\} \quad \text{„groß“} \\ A \cap B &= \{4,6\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A) &= 3/6 \\ P(A \cap B) &= 2/6 \\ P(B|A) &= P(A \cap B)/P(A) = (2/6)/(3/6) = 2/3\end{aligned}$$

Interpretation:

Wenn bekannt ist, dass die gewürfelte Zahl gerade ist, steigt die Wahrscheinlichkeit für „groß“ auf $2/3$.

Multiplikationssatz

Satz

Für zwei beliebige Ereignisse A und B gilt:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Beweis

Nach Definition gilt:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B)$$

$$\text{und } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

zusammen ergibt sich

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Fußball Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Halbfinale zu gewinnen ?

Gesucht: $P(B)$ mit $B = \text{„Sieg im Halbfinale“}$

Siegchancen sind abhängig vom jeweiligen Gegner!

\implies bedingte Wahrscheinlichkeiten.

A_1	Gegner ist Mannschaft	1
A_2	"	2
A_3	"	3

Bedingte Wahrscheinlichkeiten leicht(er) anzugeben:

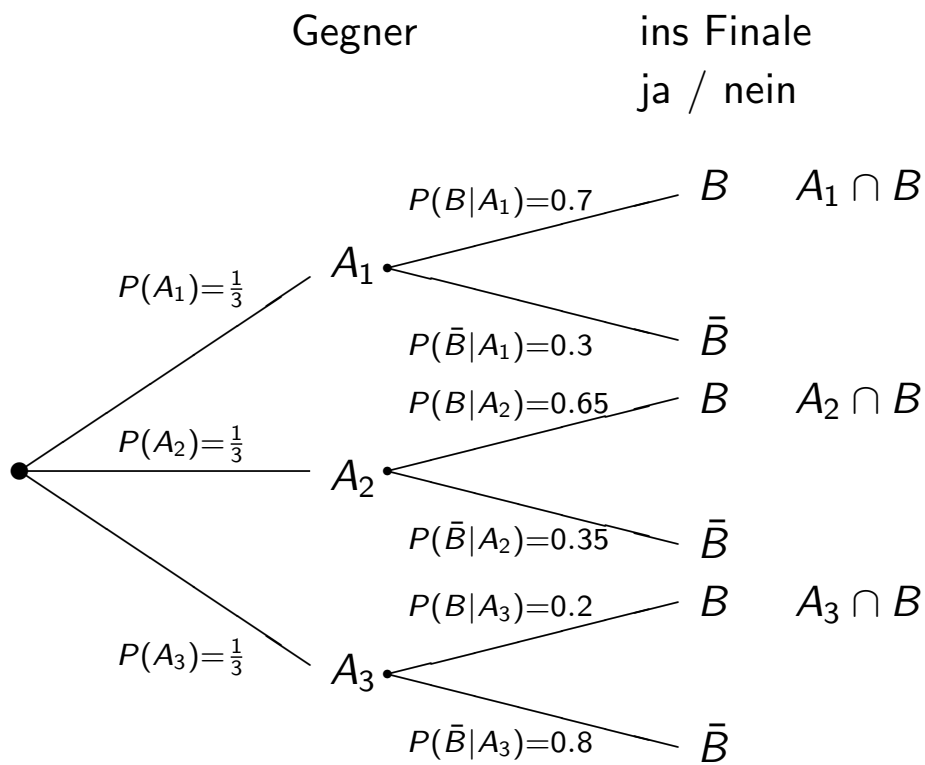
$$P(B|A_1) = 0.7$$

$$P(B|A_2) = 0.65$$

$$P(B|A_3) = 0.2$$

Gegner wird ausgelost \implies Annahme: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

Wahrscheinlichkeitsbaum (Fußball Beispiel)



Fußball Beispiel(2)

Welche „Wege“ im Wahrscheinlichkeitsbaum führen zu B ?
Nutze Multiplikationssatz

$$\left. \begin{aligned} P(A_1 \cap B) &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) = \frac{1}{3} \cdot 0.7 \\ P(A_2 \cap B) &= P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \frac{1}{3} \cdot 0.65 \\ P(A_3 \cap B) &= P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \frac{1}{3} \cdot 0.2 \end{aligned} \right\} \text{insgesamt: } 0.52$$

Verallgemeinerung: Vollständige Zerlegung

- A_1, A_2, A_3 bilden eine vollständige Zerlegung.
- $(A_1 \cap B)$, $(A_2 \cap B)$ und $(A_3 \cap B)$ sind disjunkt und ergeben in der Vereinigung B

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)) \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \\ &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) = 0.52 \end{aligned}$$

Entlang der Äste multiplizieren, dann summieren

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz

Bilden die Ereignisse A_1, \dots, A_n eine *vollständige* Zerlegung von $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ in paarweise disjunkte Ereignisse, so gilt für ein beliebiges Ereignis B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Satz von Bayes

Satz

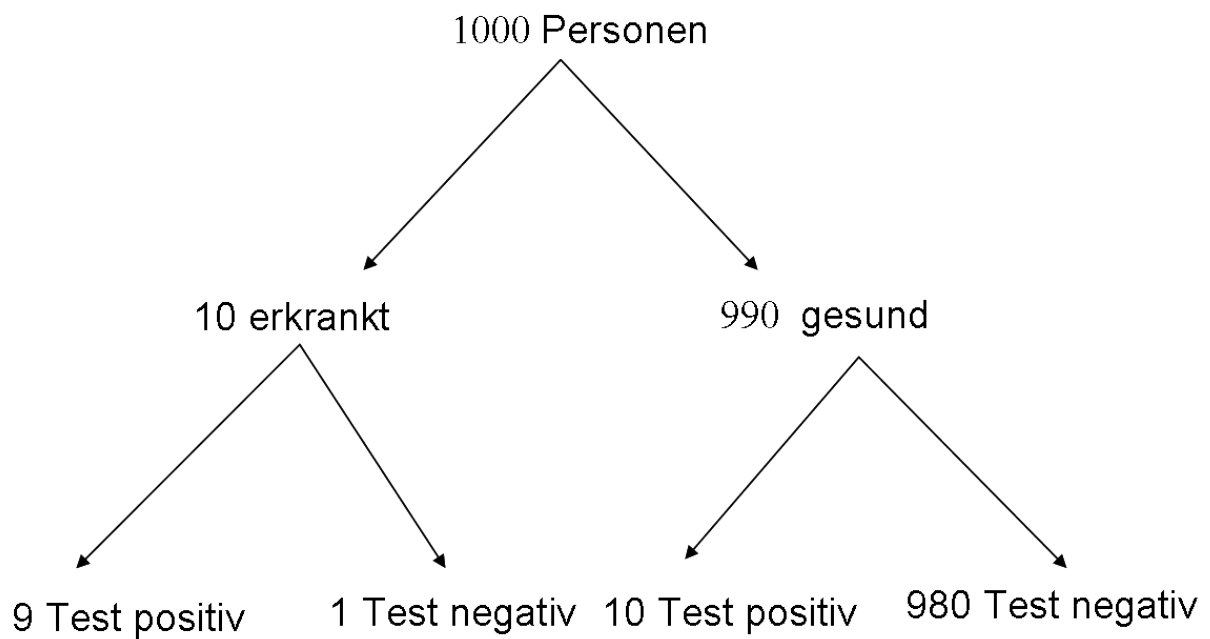
Für beliebige Ereignisse A und B mit $P(A), P(B) > 0$ gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Bilden die A_i eine vollständige Zerlegung von Ω und ist B irgendein Ereignis, so gilt unter Zuhilfenahme des *Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit*:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}.$$

Medizinische Tests



Medizinische Tests 2

K: Krank
G: Gesund
TP: test positiv
TN: Test negativ

Gegeben:

$$P(K) = 10/1000 = 0.01$$

$$P(TP|K) = 9/10 = 0.9$$

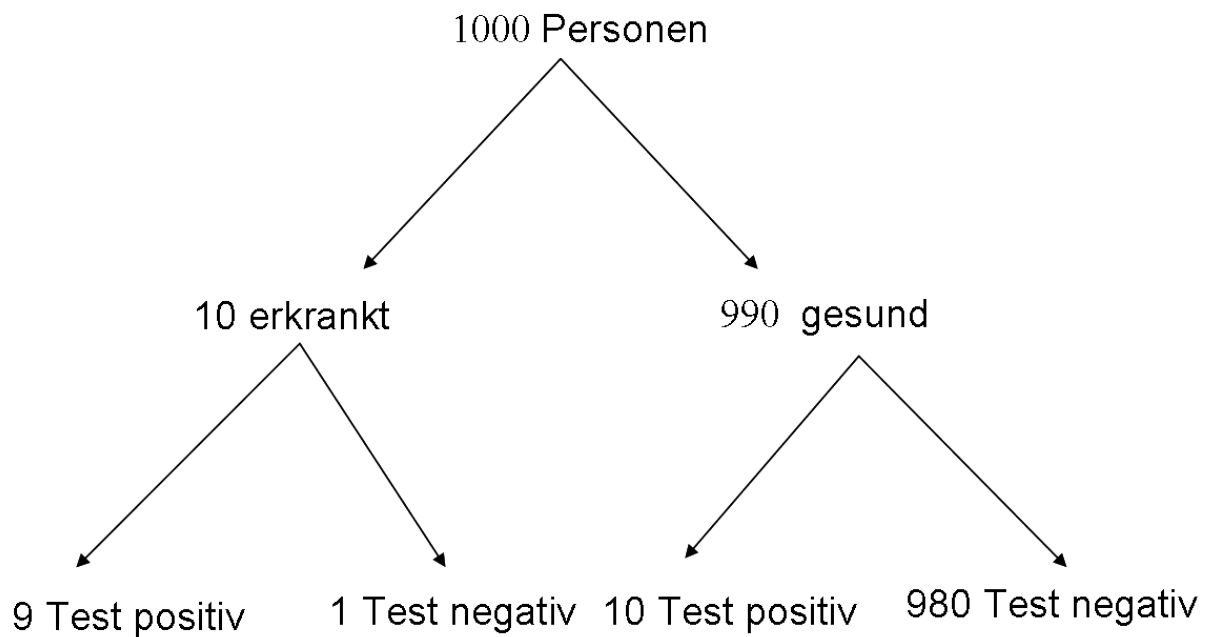
$$P(TN|G) = 10/990 = 0.01$$

$$P(K|TP) = ???$$

Lösung mit Satz von Bayes

$$\begin{aligned} P(K|TP) &= \frac{K \cap TP}{P(TP)} \\ &= \frac{P(TP|K) \cdot P(K)}{P(TP|K) \cdot P(K) + P(TP|G) \cdot P(G)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.9}{0.99 \cdot 0.0101} = 0.474 \end{aligned}$$

Lösung mit Population



Beachte: Die Bedingung entspricht der Bezugspopulation 9 von 19 Patienten mit positivem Test sind tatsächlich krank:

$$P(K|TP) = 9/19 = 0.474$$

Unabhängigkeit

Definition **stochastisch unabhängig**

Zwei zufällige Ereignisse A und B heißen genau dann voneinander stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt, d.h., wenn die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten von A und B gleich dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

Folgerungen

- Sind zwei Ereignisse A und B unabhängig so folgt, dass das Eintreten des Ereignisses B keinen Einfluss auf das Eintreten von A hat, d.h. es gilt:

$$P(A|B) = P(A|\bar{B}) = P(A)$$

- Man kann unter der Annahme der Unabhängigkeit Wahrscheinlichkeiten berechnen:
A: Beim ersten Wurf 6
B: Beim zweiten Wurf 6

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/36$$