Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017

Bayes- Schätzung und Bayes-Lernen

Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace, Ramsey, de Finetti:

„Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist der Grad der Überzeugung, mit der ein Beobachter aufgrund eines bestimmten Informationsstandes an das Eintreten eines Ereignisses glaubt“

$P(A)$ ist der Wetteinsatz in Euro, den eine Person höchstens einzugehen bereit ist, falls diese bei Eintreten von A einen Euro gewinnt.

Beispiel: Trifft Müller beim Elfmeter?

3 Theorien :

UH	immer p =1.0
AR	p= 0.8
JL	p=0.7

Ansatz: Theorien habe gleiche Wahrscheinlichkeit

$$P(UH) = P(AR) = P(IL) = 1/3$$

Daten : Ein Treffer $X_1 = 1$
Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Beobachtung unter den verschiedenen Theorien (Likelihood)

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|UH) &= 1 \\ P(X_1 = 1|AR) &= 0.8 \\ P(X_1 = 1|JL) &= 0.7 \end{aligned}$$

ML-Prinzip: Theorie UH stimmt

Satz von Bayes

Bilden die A_i eine vollständige Zerlegung von Ω und ist B irgendein Ereignis, so gilt:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}.$$

In unserem Fall entsprechen die A_j den Theorien $A_1 = UH$ etc. und das Ereignis B entspricht den Daten $X_1 = 1$

$$P(UH) = P(AR) = P(JL) = 1/3$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|UH) &= 1 \\ P(X_1 = 1|AR) &= 0.8 \\ P(X_1 = 1|JL) &= 0.7 \end{aligned}$$

Posteriori- Wahrscheinlichkeiten

Wir berechnen jetzt die Posteriori-Wahrscheinlichkeit der Theorien gegeben die Daten:

$$P(UH|X_1 = 1) = \frac{P(UH) \cdot P(X_1 = 1|UH)}{P(UH) \cdot P(X_1 = 1|UH) + P(AR) \cdot P(X_1 = 1|AR) + P(JL) \cdot P(X_1 = 1|JL)}$$

$$\begin{aligned}
P(UH|X = 1) &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.8 + \frac{1}{3} \cdot 0.7} \\
&= \frac{1}{1 + 0.8 + 0.7} = 0.4 \\
P(AR|X = 1) &= \frac{0.8}{1 + 0.8 + 0.7} = 0.32 \\
P(JL|X = 1) &= \frac{0.7}{1 + 0.8 + 0.7} = 0.28
\end{aligned}$$

Leichte Verschiebung

Verwendung weiterer Daten

13 von 15 (TM)
Berechnung der Likelihood mit Hilfe der Binomialverteilung(i.i.d)

$$\begin{aligned} P(X_2 = 13|UH) &= 0 \\ P(X_2 = 13|AR) &= 0.23 \\ P(X_2 = 13|JL) &= 0.09 \end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt die Posteriori-Wahrscheinlichkeit der Theorien gegeben die Daten:

$$\begin{aligned} P(UH|X_2 = 13) &= \frac{0}{0 + 0.23 + 0.09} = 0 \\ P(AR|X_2 = 13) &= \frac{0.23}{0 + 0.23 + 0.09} = 0.72 \\ P(JL|X_2 = 13) &= \frac{0.09}{0 + 0.23 + 0.09} = 0.28 \end{aligned}$$

Es spricht Einiges für AR

Gerd Müller

50 von 62 (GM)
Berechnung der Likelihood mit Hilfe der Binomialverteilungsannahme (i.i.d)

$$\begin{aligned} P(X_3 = 50|UH) &= 0 \\ P(X_3 = 50|AR) &= 0.126 \\ P(X_3 = 50|JL) &= 0.021 \end{aligned}$$

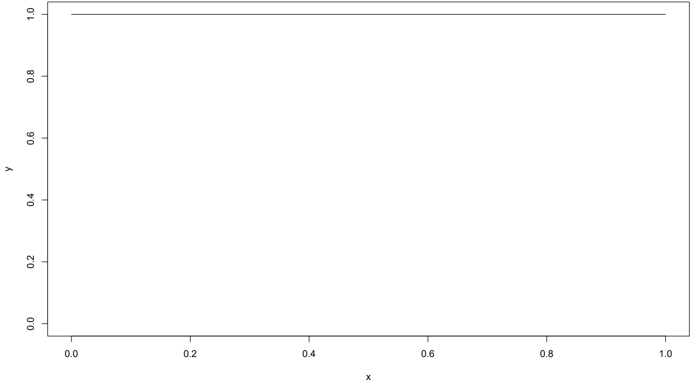
Wir berechnen jetzt die Posteriori-Wahrscheinlichkeit der Theorien gegeben die Daten:

$$\begin{aligned} P(UH|X_2 = 13) &= \frac{0}{0 + 0.126 + 0.021} = 0 \\ P(AR|X_2 = 13) &= \frac{0.126}{0 + 0.126 + 0.021} = 0.86 \\ P(JL|X_2 = 13 &= \frac{0.021}{0 + 0.126 + 0.021} = 0.14 \end{aligned}$$

Es spricht Einiges für AR

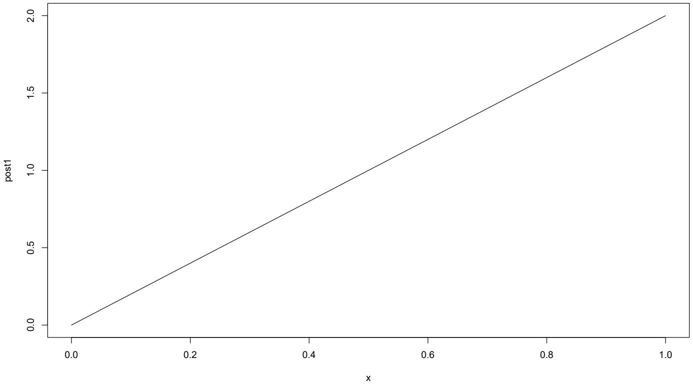
Inferenz über unbekannten Parameter

Parameter θ unbekannt
Apriori Gleichverteilung



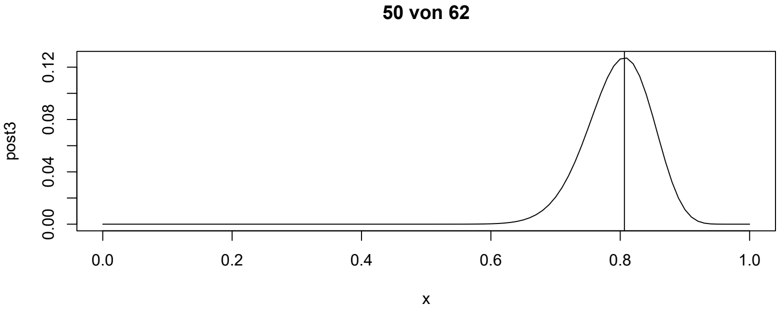
Berechnung der Posteriori–Verteilung für einen Treffer

Inferenz über unbekannten Parameter



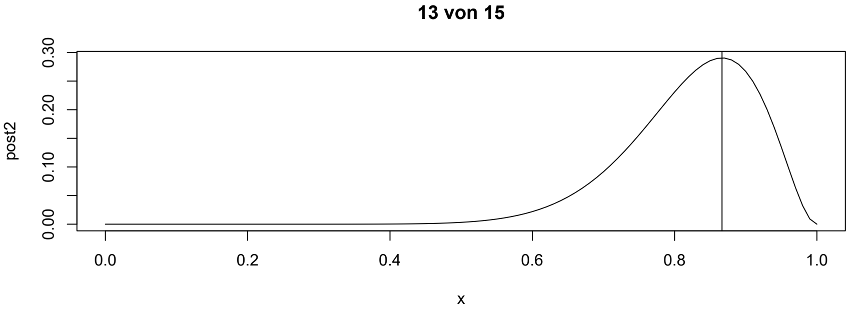
Gerd Müller

50 von 62 (GM)
Berechnung der Likelihood und der Posteriori–Verteilung mit Hilfe der Binomialverteilungsannahme (i.i.d)



Thomas Müller

13 von 15 (TM)
Berechnung der Likelihood und der Posteriori–Verteilung mit Hilfe der Binomialverteilungsannahme (i.i.d)



Berechnung der Posteriori–Verteilung

Inferenz für Parameter θ bei Beobachtung x

- $f(\theta)$ Priori - Verteilung von θ
- $f(x|\theta)$ Wahrscheinlichkeitsfunktion/Dichte von x bei Parameter θ
- $f(x)$ a priori Randverteilung von x
- $f(\theta|x)$ Posteriori - Verteilung von θ gegeben die Beobachtung x

Berechnung der Posteriori-Dichte

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{f(x)} = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\int f(x|\theta)f(\theta)d\theta}$$

Allgemeine Form

Bei Beobachtungen $x_1, \ldots x_n$ wird die gemeinsam Dichte betrachtet. Man erhält für unabhängige Beobachtungen:

$$f(x_1, \ldots, x_n|\theta) = f(x_1|\theta) \cdot f(x_2|\theta) \cdots f(x_n|\theta) = L(\theta)$$

$L(\theta)$ ist die Likelihoodfunktion

Bayes-Inferenz

Bayes–Inferenz

Die Wahrscheinlichkeits- oder Dichtefunktion von X gegeben der Parameter θ ist gegeben durch

$$f(x|\theta)$$

Die Likelihood ist

$$L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$$

Für den unbekannten Parameter θ ist die Priori-Dichte gegeben

$$f(\theta)$$

Dann gilt für die Posteriori- Dichte von θ

$$f(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)|\theta)f(\theta)}{f(x)} = \frac{L(\theta)f(\theta)}{\int L(\theta)f(\theta)d\theta}$$

Bemerkungen

- Die Posteriori-Verteilung $f(\theta|x_1, \ldots, x_n)$ enthält die gesamte Information der Daten über den Parameter θ
- Die Posteriori-Verteilung hat folgende Darstellung :

$$f(\theta|x_1, \ldots, x_n) = cL(\theta)f(\theta)$$

  Dabei kann c als von θ unabhängiger Normierungsfaktor angesehen werden
- Ein zentrales Problem bei der Bayes–Inferenz ist die Wahl der Priori-Verteilung. Man wählt häufig sog. nicht-informativen Priori-Verteilungen

Binomialverteilung

$X \sim Bin(n, \theta)$

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x}$$

Priori - Dichte

$$f(\theta) = 1 \text{ für } 0 \leq \theta \leq 1$$

Posteriori

$$f(\theta|x) = c \binom{n}{x} \theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x}$$

Schätzung

Die Inferenz erfolgt mit der Posteriori-Verteilung f_{POST} Punktschätzung von θ durch

- Posteriori - Modus, d.h. Maximum von f_{POST}
- Posteriori - Erwartungswert, d.h. Erwartungswert von θ unter $f_{POST}(\theta)$

Intervallschätzung

Strategie: Finde Intervall, in dem der Parameter mit Wahrscheinlichkeit γ liegt

$$P(\theta \in [\theta_u, \theta_o] = \gamma$$

Bezeichnung: Kredibilitätsintervalle

Beispiel: Normalverteilung (Fahrmeir et al.)

Beispiel übernommen aus:
L. Fahrmeir, Ch. Heumann, R. Künstler, I. Pigeot und G. Tutz: Statistik - Der Weg zur Datenanalyse, (8. Auflage), Springer-Verlag, 2016.

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Wiederholungen von $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wobei μ zu schätzen ist, aber nun σ^2 als bekannt angenommen wird. Als a priori Dichte für μ wählen wir eine $N(\mu_0, \sigma_0^2)$-Verteilung, also

$$f(\mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}.$$

Die a posteriori Dichte ergibt sich also aus:

$$f(\mu \mid x_1, \ldots, x_n) = \frac{L(\mu, \sigma) f(\mu)}{\int L(\mu, \sigma) f(\mu)\, d\mu}$$

Beispiel: Normalverteilung (Fortsetzung)

Es ergibt sich eine Normalverteilung

$$\mu \mid x_1, \ldots, x_n \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$$

mit a posteriori Erwartungswert

$$\tilde{\mu} = \frac{n\sigma_0^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}\bar{x} + \frac{\sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}\mu_0$$

und a posteriori Varianz

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n + \sigma^2/\sigma_0^2} \; .$$

Beispiel: Normalverteilung (Zusammenfassung)

- Für $\sigma_0^2 \to 0$ ("exaktes Vorwissen") gilt $\tilde{\mu} \to \mu_0$
- Für $\sigma_0^2 \to \infty$ ("kein Vorwissen") ergibt sich $\tilde{\mu} \to \bar{x}$, also die Maximum Likelihood-Schätzung $\hat{\mu} = \bar{x}$ aus der Stichprobe
- Analog für die Varianz

Also:

$$\mu \mid x_1, \ldots, x_n \to N\left(\bar{x}, \sigma^2/n\right) \quad \text{für } \sigma_0^2 \to \infty$$

bei nichtvorhandenem Vorwissen über μ, und

$$\mu \mid x_1, \ldots, x_n \to N(\mu_0, 0)$$

bei sicherem Vorwissen $\mu = \mu_0$.

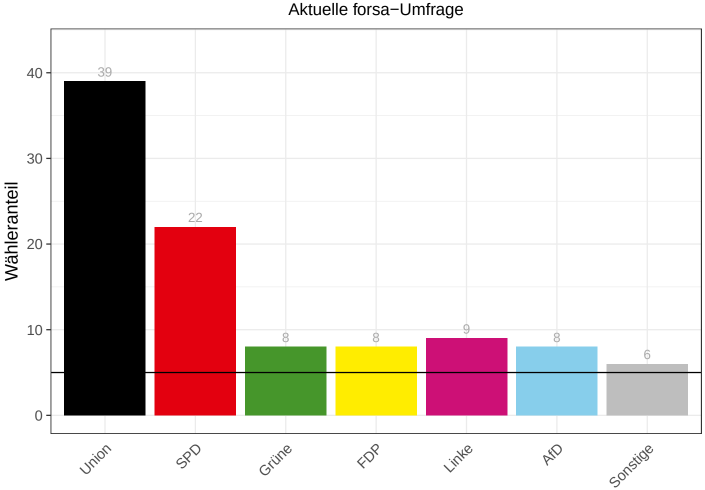
Der "Hyperparameter" σ_0^2 steuert also den Kompromiss zwischen Stichprobeninformation und subjektiver a priori Information.

Vergleich: Frequentistisch vs. Bayes–Inferenz

- Da die Likelihood wesentlich in die Berechnung eingeht gibt es teilweise ähnliche Ergebnisse, z.B Kredibilitätsintervalle mit nicht informativer Prioi sind in bestimmten Fällen identisch mit Konfidenzintervallen
- Unterschiedliche Interpretation
- Laufende wissenschaftliche Diskussion

Auswertung von Umfragen: Wahlistik

Verwende Umfrageergebnisse, z.B.



Bayes Schätzung von Wahrscheinlichkeiten