Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017

Termine und Informationen

Homepage:
`http://www.stablab.stat.uni-muenchen.de/lehre/veranstaltungen/statistik2wiwi/index.html`

Vorlesung:

Prof. Helmut Küchenhoff

Di 16:00 - 18:00	Audi max

Übung (wöchentlich):

Ansprechperson: Andre Klima, Matthias Aßenmacher

Übung 1:	Mi. 12.15 - 13.45 Uhr	Geschwister-Scholl-Platz 1 D209
Übung 2:	Mi. 12.15 - 13.45 Uhr	Geschwister-Scholl-Platz 1 E004
Übung 3:	Mi. 14.15 - 15.45 Uhr	Geschwister-Scholl-Platz 1 D209
Übung 4:	Mi. 14.15 - 15.45 Uhr	Geschwister-Scholl-Platz 1 E004
Übung 5:	Do. 18.00 - 19.30 Uhr	Geschwister-Scholl-Platz 1 D209
Übung 6:	Fr. 10.15 - 11.45 Uhr	Geschwister-Scholl-Platz 1 M114

Literatur

L.Fahrmeir, Ch. Heumann, R.Künstler, I.Pigeot, G.Tutz:

Statistik - Der Weg zur Datenanalyse
Springer-Verlag, 8. Auflage, 2016

H.Toutenburg, C.Heumann:
Deskriptive Statistik - Eine Einführung in Methoden und Anwendungen mit R und SPSS
Springer-Verlag, 2009

Dank

an Christian Heumann für Materialien und Folien

- **Einführung**

1. Wahrscheinlichkeit: Definition und Interpretation

Was ist Statistik?

March of science 22.4.2017

- Let's make facts great again
- Grab them by data
- We need evidence based policy

Definition Statistik

Statistik als Wissenschaft bezeichnet eine Methodenlehre, die sich mit der Erhebung, der Darstellung, der Analyse und der Bewertung von Daten auseinander setzt. Ein zentraler Aspekt ist dabei die Modellbildung mit zufälligen Komponenten.

Teilgebiete:

- Deskriptive Statistik: beschreibend
- Explorative Datenanalyse: Suche nach Strukturen
- Induktive Statistik: Schlüsse von Daten auf Grundgesamtheit oder allgemeine Phänomene

Beispiel 1: Präsidentschaftswahl in Frankreich

Prognose 20:00 Franz. TV

Macron	Le Pen	Fillon	Melenchon	Hamon
23%	22%	19%	19 %	6.8%

Ergebnis:

Macron	Le Pen	Fillon	Melenchon	Hamon
24%	21.3%	20%	19.6 %	6.4%

Schluss von Stichprobe auf Grundgesamtheit

Induktive Statistik

- Schluss von Daten auf allgemeine Phänomene
- Zentrales Mittel für Erkenntnisse
- Umgang mit Unsicherheit
- Rationale Grundlage von Entscheidungen
- Unterschiedliche Ansätze

Programm

1. Wahrscheinlichkeitsbegriff
2. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
3. Zufallsgrößen
4. Spezielle Verteilungsmodelle
5. Schätzen
6. Statistische Tests
7. Inferenz bei Regression

Einführung

1 Wahrscheinlichkeit: Definition und Interpretation

Wahrscheinlichkeitsrechnung für Wirtschaftswissenschaft?

1. Probabilistisches Denken (d.h. das Denken in Wahrscheinlichkeiten) unerlässlich! Strenge Kausalitäten (wenn A dann folgt immer B) findet man bestenfalls vereinzelt in Naturwissenschaften, in den Wirtschaftswissenschaften gilt typischerweise nur: wenn A dann folgt eher B als C.

2. Wahrscheinlichkeiten und Umgang mit Unsicherheit spielen in der Wirtschaft eine wichtige Rolle. Bei naiver Herangehensweise (ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung) kann man sich leicht täuschen. Riskoberwertung ist ein zentraler Aspekt bei unternehmerischem Handeln

3. Stichprobenverfahren und statistische Modelle spielen in den (empirisch orientierten) Wirtschaftswissenschaften eine zentrale Rolle. Für das Verständnis sind Grundlagenkenntnisse in Wahrscheinlichkeitsrechnung zentral

Klassische Aspekte und Meilensteine

Wahrscheinlichkeit

- Wahrscheinlichkeit im Glücksspiel, v.a. Würfelspiel: Profanisierung erst im Mittelalter, dort erst als Zufall gedeutet, vorher oft als Gottesurteil etc.
  - Cardano (1501-1576)
  - Gallilei (1546-1642)
  - Briefwechsel zwischen Pascal (1623-1662) und Fermat (1601-1665), erste systematische Wahrscheinlichkeitsrechnung: Lösung für Frage, wie Einsätze gerecht aufzuteilen sind, wenn Spiel unterbrochen wurde
  - Huygens (1629-1695)

Historische Wurzeln

Mathematisierung von Glücksspiel

- als philosophischer/theologischer Begriff
- der Philosophie des Unsicheren und
- der Mathematik der Glücksspiele

Jacob Bernoulli (1654 - 1705)

Binomialverteilung
Theorem von Bernoulli: durch genügend große Versuchsreihen kann der Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit eines Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit beliebig gering gemacht werden.

Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace (1749 - 1827)

- Aufbauend auf Symmetrieüberlegungen
- Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A:

$$P(A) := \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der (gleich) möglichen Fälle}}$$

Beispiel

Wurf eines fairen Würfels

- Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: Es wird eine gerade Zahl gewürfelt

  möglich: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  günstig: $\{2, 4, 6\}$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Erfolgreiche Anwendung v.a. auf Glücksspiele, in der Physik (stochastische Mechanik) und in der Stichprobentheorie bei einer **einfachen Zufallsauswahl**
- Intuitiv einleuchtend, aber beschränkte Anwendbarkeit

Probleme

Warum reichen Laplace-Wahrscheinlichkeiten nicht?

Essentielle Voraussetzung: alle Fälle müssen gleich möglich (also gleich wahrscheinlich) sein!

Beispiel: Wie wird das Wetter morgen? 3 Möglichkeiten:

$$\{\text{Sonne},\text{Regen},\text{Gemischt}\} \Longrightarrow P(\text{Sonne}) = \frac{1}{3}$$

Wahrscheinlichkeitsbegriffe

Objektivistisch / frequentistische Richtungen / aleatorische Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeiten beschreiben tatsächlich vorhandene, zufällige Gesetzmäßigkeiten
- Objektbezogen: Wahrscheinlichkeit ist eine Eigenschaft des untersuchten Objekts (z.B. Würfel), objektiv $\longleftrightarrow$ objektbezogen (wie z.B. spezifisches Gewicht, Länge)
- Häufigkeitsinterpretation bzw. sogar -definition Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeiten in unendlich langen reproduzierbaren Experimenten

Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff I

R. von Mises (1883 - 1953):

„Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die langfristige relative Häufigkeit seines Auftretens“

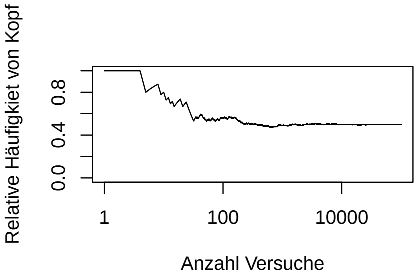
Für ein Ereignis A:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

n_A : Anzahl der Erfolge
n : Anzahl der Versuche

Experimente

- Buffon (1707-1788) : 4040 Würfe , 2048 "Kopf"
- Karl Pearson (1857-1936) 24000 Würfe, 12012 "Kopf"
- Computersimulation 100.000 Würfe 49972 "Kopf"



Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff II

Probleme bei der Definition

- Einmalige Ereignisse
- Grenzwertdefinition
- Experimentdurchführung

Subjektivistische Richtungen I

- Wahrscheinlichkeit hat ausschließlich mit Unsicherheit, nicht mit Zufälligkeit zu tun

  (Man kann auch über völlig deterministische Aspekte unsicher sein!)

- Wahrscheinlichkeit ist Eigenschaft des untersuchenden Subjekts

  $\Longrightarrow$ verschiedene Subjekte können durchaus zu unterschiedlichen Bewertungen kommen.

Subjektivistische Richtungen II

- Anwendung auch auf Aussagen.

  Bsp: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Regierungskoalition die gesamte Legislaturperiode hält, ist...

- behaviouristischer Standpunkt: Wahrscheinlichkeiten äußern sich im Verhalten und können so gemessen werden
  z.B. bei Wetten

Wichtig

Subjektiv sind die Wahrscheinlichkeiten aber nicht die Rechenregeln.

Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff I

Laplace, Ramsey, de Finetti:

„Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist der Grad der Überzeugung, mit der ein Beobachter aufgrund eines bestimmten Informationsstandes an das Eintreten eines Ereignisses glaubt"

$P(A)$ ist der Wetteinsatz in Euro, den eine Person höchstens einzugehen bereit ist, falls diese bei Eintreten von A einen Euro gewinnt.

Beispiele:

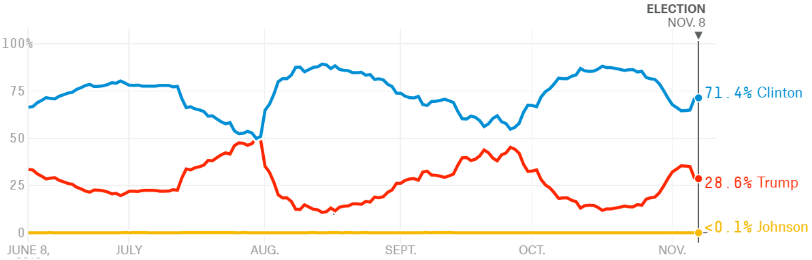
Münzwurf:	Einsatz auf „Zahl" bis zu 0.5 € sinnvoll
Würfel:	Einsatz auf „5 oder 6" bis zu $1/3$ € sinnvoll

Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff II

Probleme

- subjektiv = unwissenschaftlich ?
- Wettdefinition
- Informationsstand

Beispiel: US Wahl



https://projects.fivethirtyeight.com/2016-election-forecast/

Beispiele

- Wahl in Frankreich http://www.economist.com/blogs/graphicdetail/2017/04/france-s-presidential-election
- Wettmärkte http://www.paddypower.com/bet/politics
- Wahlistik
- Fussballwetten https://www.oddset.de/de

Überprüfung von Aussagen über Wahrscheinlichkeiten

- Nicht durch Einzelfälle
- Relative Häufigkeiten
- (Imagiäre) Wetten

Zur Kommunikation von Wahrscheinlichkeiten

Literatur:
D. Kahnemann, P. Slovic, A. Tversky: Judgement under uncertainty: Heuristics and biases Cambridge press 1982.

Darstellung durch natürliche Häufigkeiten (nach Gigerenzer)

- Superrepräsentative Stichprobe vorstellen
- Dann $P(A) = 0.1756$ vorstellen als: 1756 Personen haben die Eigenschaft A.

\+ einfachere Kommunikation von Wahrscheinlichkeiten und Risiken, reduziert Fehler beim Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten Experimente mit Ärzten zeigen, dass die Darstellungsform Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten) einen starken Einfluss auf die Korrektheit von Berechnungen hat.

– Gefahr der Verschleierung von Unsicherheit: die natürlichen Häufigkeiten sind zu *erwartende Durchschnittswerte*, wenn man sehr viele Stichproben hätte.

Beispiel: Beipackzettel

Angabe des Risikos von Nebenwirkungen auf Beipackzetteln

sehr häufig:	mehr als 1 von 10 Behandelten
häufig:	weniger als 1 von 10, aber mehr als 1 von 100 Behandelten
gelegentlich:	weniger als 1 von 100, aber mehr als 1 von 1000 Behandelten
selten	weniger als 1 von 1000, aber mehr als 1 von 10000 Behandelten
sehr selten:	1 Fall oder weniger von 10000 Behandelten, einschließlich Einzelfälle

Welche Nebenwirkungen können bei der Anwendung von *** auftreten?

Gelegentlich wurde über das Auftreten von Mundschleimhautentzündungen, Kopfschmerzen, Ohrengeräuschen berichtet.
Selten können auftreten: Beschwerden im Magen-Darm-Bereich (z.B. Sodbrennen, Übelkeit, Erbrechen oder Durchfall).

Beispiel: Lotto

6 aus 49

- Beim Lotto ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Spiel einen 6er zu bekommen:

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 0.000000072$$

- „Einmal in 14 Millionen Spielen“
- „Einmal in 20.000 Jahren bei wöchentlichem Spielen“
- „Es ist wahrscheinlicher, den Tag der Ziehung nicht mehr zu erleben, als zu gewinnen“
- Simulationsexperiment

Risiko

- Häufig als Wahrscheinlichkeit verwendet
- Manchmal auch als Paar von Wahrscheinlichkeit und Höhe eines Verlustes
- Produkt aus Wahrscheinlichkeit und Schaden
- Entscheidungstheorie unterschiedet verschiedenes Risikoverhalten

Value at risk

- Risikomaß für Wertpapiere
- Der Verlust, der mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ innerhalb eines bestimmten Zeitraums nicht überschritten wird.
- Für verschiedene Portfolios einsetzbar
- Anwendungen auch für Firmen
- Aufsichtsbehörden

Risikodarstellung in der Medizin

Beschreibung von Risiken für die menschliche Gesundheit

- **Absolutes Risiko:**
  Angabe von Krankheitswahrscheinlichkeiten, jeweils getrennt für die Gruppe mit und ohne Risikofaktor
- **Relatives Risiko:**
  Verhältnis der Krankheitswahrscheinlichkeiten mit und ohne Risikofaktor
- **Anzahl der zusätzlich geschädigten Personen**
  (erwarteter Effekt)

Beispiel: Wirkung von Pravastatin

„Menschen mit hohem Cholesterinspiegel können das Risiko eines erstmaligen Herzinfarkts sehr schnell um 22 Prozent vermindern, wenn sie einen häufig angewandten Wirkstoff namens Pravastatin einnehmen“

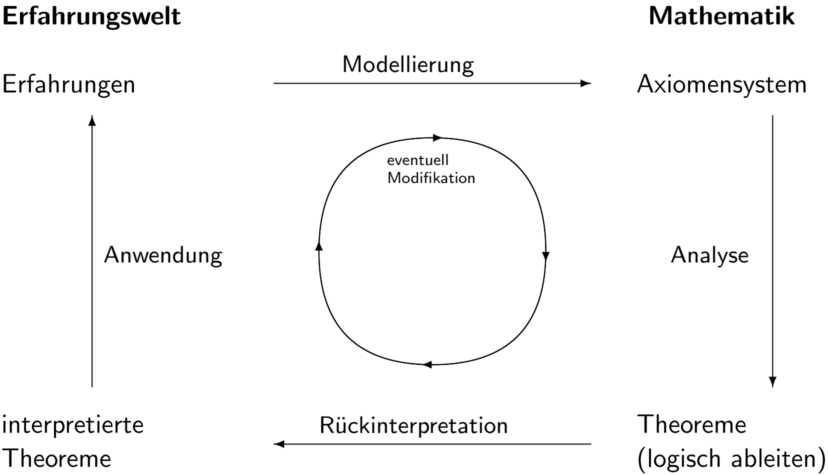
- Reduktion der Todesfälle von 41 auf 32 pro 1000 Patienten mit hohem Chorlesterin ($32 = 41 \cdot (1\text{-}0.22) = 41 \cdot 0.78$)
  Wahrscheinlichkeit für Todesfall: Reduktion von 4.1% auf 3.2%
  Absolute Risikodifferenz: 0.9%
- Reduktion um 22% (relatives Risiko 0.78) „22% werden gerettet“
- Es müssen 111 Patienten behandelt werden, um ein Menschenleben zu retten.
  Number needed to treat = 1/Absolute Risikodifferenz = $1/0.009 = 111.11$

Mathematisch-formaler Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiome

- Axiomatik nach Kolmogoroff
- typische Anwendung der axiomatischen Methode:
  Axiom: Nicht bezweifelte Grundannahme für Kalkül
- Die Kolmogorffsche Axiomatik ist eine reine Definition, die sich zunächst im luftleeren Raum bewegt. Es wird rein formal festgelegt, was eine Wahrscheinlichkeit sein soll.
- Die Axiomatik ist *verträglich* sowohl mit der *Häufigkeits*- als auch mit der *Wettinterpretation*.
- Die Axiome von Kolmogoroff geben an, wie man mit Wahrscheinlichkeiten rechnet.
- Welche Phänomene man durch Wahrscheinlichkeiten beschreiben darf und wie die Ergebnisse zu interpretieren sind, ist aber damit nicht geklärt.

Die axiomatische Methode



Ausblick

- In der Tat gibt es auch Kritik an dieser Axiomatik: zu streng und überpräzise $\longrightarrow$ aktueller Forschungsgegenstand (*Imprecise Probabilities, Intervallwahrscheinlichkeit*); hier nicht näher thematisiert: Kolmogoroff als absolute Wahrheit. Kritik:
  - Modellierung unsicheren (partiell widersprüchlichen, unvollständigen) Expertenwissens
  - Ökonomie: Entscheidungen unter komplexer Unsicherheit widersprechen Prognosen aus der üblichen Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsvorgänge

Ein Zufallsvorgang (Zufallsexperiment) führt zu einem von mehreren, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen. Es ist vor der Durchführung ungewiss, welches Ergebnis eintreten wird.
Was benötigen wir zur Beschreibung eines Zufallsvorganges?

Zwei wesentliche Aspekte:

a) Welche Ergebnisse eines Zufallsvorgangs sind möglich? (Was kann alles passieren?)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die einzelnen Ergebnisse ein?

Formale Beschreibung I

Ergebnisraum

Festlegen eines *Ergebnisraums* (Grundraum, Stichprobenraum) Ω, der alle möglichen *Ergebnisse* ω enthält.

Beispiele:

- $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ beschreibt die möglichen Ergebnisse eines Würfelexperiments

  Ein mögliches Ergebnis: $\omega = 4$; $\omega = 17$ ist kein mögliches Ergebnis.
- $\Omega = \mathbb{R}_0^+$ beschreibt die möglichen Erwerbseinkommen

  Ein mögliches Ergebnis: $\omega = 17513$ €
- Ziehung einer Person: $\Omega = \{1, \ldots, N\}$

  Ein mögliches Ergebnis: $\omega = 17$

Formale Beschreibung II

Ereignisse

Ereignisse sind **Teilmengen** von Ω

Beispiele:

- „gerade Zahl“ $= \{2, 4, 6\}$
- „1 oder 2“ $= \{1, 2\}$
- „Einkommen zwischen 1000 und 2000 €“ $= \{\omega | 1000 \leq \omega \leq 2000\}$
- „Person ist weiblich“ $= \{$alle Nummern, die zu Frauen gehören$\}$

Ereignissen sollen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden.
Wir bezeichnen Ereignisse mit A,B,C,...

Ereignisoperationen

$A \cup B$:	Vereinigung	= „A oder B“
$A \cap B$:	Durchschnitt	= „A und B“
A^C:	Komplement	= „Nicht A“

Beispiele:

Ω	$= \{1,2,3,4,5,6\}$	
A	$= \{2,4,6\}$	„gerade“
B	$= \{4,5,6\}$	„groß“
$A \cup B$	$= \{2,4,5,6\}$	„gerade oder groß“
$A \cap B$	$= \{4,6\}$	„gerade und groß“
A^C	$= \{1,3,5\}$	„ungerade“
B^C	$= \{1,2,3\}$	„klein“

Wahrscheinlichkeit (formale Definition)

Wahrscheinlichkeit

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ordnet jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zu. Eine Wahrscheinlichkeit ist also eine Abbildung von Ereignissen (Elementen der Potenzmenge von Ω) auf reelle Zahlen:

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

Dabei sollen gewisse fundamentale Rechenregeln gelten, z.B.

- 108 kann keine Wahrscheinlichkeit sein, nur Zahlen zwischen 0 und 1.
- $P(\{2,3\})$ muss mindestens so groß sein wie $P(\{3\})$.

Axiome von Kolmogorov

Die drei Axiome

Eine Funktion P (P steht für Probability), die Ereignissen aus Ω reelle Zahlen zuordnet, heißt *Wahrscheinlichkeit*, wenn gilt

(K1) $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse $A \subset \Omega$.

(K2) $P(\Omega) = 1$.

(K3) Falls $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Axiome von Kolmogorov (1933)

- Die Axiome von Kolmogorov stellen zunächst eine reine Definition dar, die festlegt, was eine Wahrscheinlichkeit sein soll.
- Es gibt verschiedene Versuche Wahrscheinlichkeiten operational zu definieren (also durch eine Messvorschrift) und verschiedene Interpretationen, die die Axiomatik mit Leben füllen sollen.
- Die Axiome passen zu den beiden bisher diskutierten Wahrscheinlichkeitsbegriffen

Zusammenfassung

- Wahrscheinlichkeitsbegriffe wichtig für Evidenz bei Unsicherheit und Entscheidungen
- Kommunikation schwierig
- Subjektive Wahrscheinlichkeiten
- Frequentistischer Begriff
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten wichtige Aufgabe