Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017

Zufallsgrößen

Ergebnisse von Zufallsexperimenten werden als Zahlen dargestellt

Beispiele:

1. Augenzahl beim Werfen zweier Würfel
2. Zeit beim Warten auf den Bus
3. Antwort ja = 1, nein = 0

Formal: Eine Zufallsgröße oder Zufallsvariable ist eine Abbildung:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

(Abbildung des Ergebnisraums auf die reellen Zahlen)

Im Beispiel 1:

$$\begin{aligned} (1{,}1) &\longrightarrow 2 \\ (1{,}2) &\longrightarrow 3 \\ (2{,}1) &\longrightarrow 3 \\ (2{,}2) &\longrightarrow 4 \end{aligned}$$

Würfelwurf mit fairem Würfel

Betrachte ein Spiel mit den Gewinnen:

ω	$X(\omega)$
≤ 3	10 €
$= 4, 5$	20 €
$= 6$	100 €

Die Wahrscheinlichkeiten P_X ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} P_X(\{10\}) &= P_X(\text{man erhält } 10\,€) \\ &= P(\text{man hat etwas gewürfelt, das zu } 10\,€ \text{ führt}) \\ &= P(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_X(\{20\}) &= P_X(\text{von allem, das zu } 20\,€ \text{ führt}) \\ &= P(\{4, 5\}) = \frac{2}{6} \end{aligned}$$

$$P_X(\{100\}) = P_X(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsgröße

Eine Zufallsgröße heißt diskret, falls sie nur endlich viele oder abzählbar viele Werte annehmen kann (typischerweise ganze Zahlen)

- P_X heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung* von X.
- X (als Variable) beschreibt den Ausgang eines Zufallsexperiments *vor der Durchführung* (Auszahlungs*regel* beim Würfelspiel: wenn 3 dann 10 Euro, wenn ..., dann ...).
- x (als Realisation) gibt den Wert der Variablen nach Durchführung des Zufallsexperiments an (daher „Realisation“, konkreter Auszahlungs*betrag*).
- In der Verwendung analog zur Unterscheidung Merkmal / Merkmalsausprägung in Statistik I.
- Es ist häufig üblich, bei P_X den Index wegzulassen, also $P(\{x\})$ statt $P_X(\{x\})$ zu schreiben.

Wahrscheinlichkeitsfunktion

Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $f(x)$ einer diskreten Zufallsvariable X ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

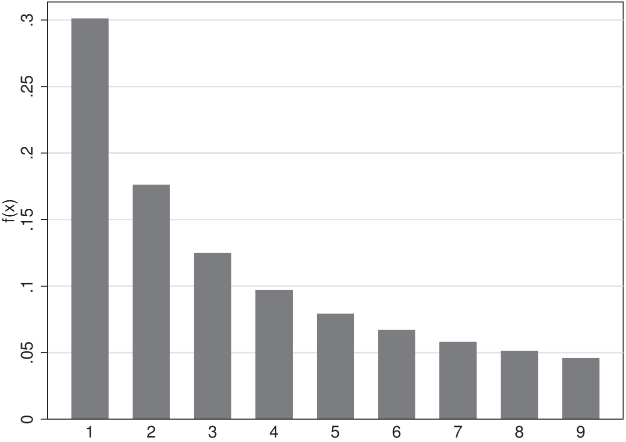
$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = p_i, & x = x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel: Benfords Gesetz

Newcomb (1835–1909) und später Frank Benford (1883–1948) machten die verblüffende Entdeckung, dass die Anfangsziffern 1–9 von ganzen Zahlen in vielen Fällen nicht gleich häufig vorkommen. Am häufigsten ist die Anfangsziffer 1, am zweithäufigsten die Anfangsziffer 2 usw.
Beispiele sind

- die Häufigkeit der Anfangsziffern von Zahlen in Zeitungsartikeln
- die Häufigkeit der Anfangsziffern von Steuerdokumenten
- die Häufigkeit der ersten Ziffer der Dateigröße von gespeicherten Dateien.

Wahrscheinlichkeitsfunktion I (Benfords Gesetz)



Wahrscheinlichkeitsfunktion II (Benfords Gesetz)

Benford publizierte für die Zufallsvariable

$$X = \text{„Anfangsziffer von Zahlen“}$$

die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \log_{10}\left(\dfrac{x+1}{x}\right), & x = 1, \ldots, 9 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Benfords Gesetz findet zum Beispiel Anwendung bei der Fahndung nach Steuerbetrügern, bei der Überprüfung von Wahlergebnissen

Zum Rechnen mit Zufallsvariablen

Sei X die Zufallsvariable *Anzahl der Haushaltsmitglieder* mit der Verteilung

P({X=1})=0.4
P({X=2})=0.3
P({X=3})=0.2
P({X=4})=0.1

(Annahme: Nur bis zu 4-Personen-Haushalte).
Man berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einfachen Zufallsauswahl vom Umfang 1 einen Mehrpersonenhaushalt zu erhalten und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Die Zahl der Haushaltsmitglieder ist gerade“.

$$
\begin{aligned}
P(\{X > 1\}) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\
&= 0.3 + 0.2 + 0.1 \\
&= 0.6
\end{aligned}
$$

$$
P(\{X \text{gerade}\}) = 0.3 + 0.1 = 0.4
$$

Verteilungsfunktion

Zufallsvariablen können durch die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq x)$ eindeutig beschrieben werden.

Definition Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x).$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- schwach monoton wachsend
- rechtsseitig stetig

Verteilungsfunktion

Berechnung der Verteilungsfunktion von diskreten Zufallsvariablen

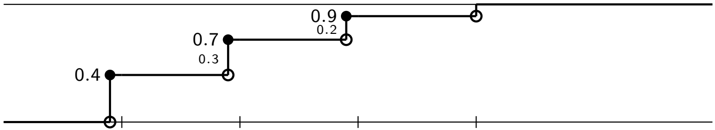
Die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen ermittelt sich über die Summe der Wahrscheinlichkeiten p_i, deren zugehörige Träger x_i kleiner-gleich dem abgefragten Wert sind:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Die Verteilungsfunktion von diskreten Zufallsvariablen ist damit

- eine *Treppenfunktion*
- mit *Sprungstellen* an den möglichen Werten x_i der jeweiligen ZV,
- die *Sprunghöhen* gleichen den zugehörigen W'keiten p_i.

Beispiel: Haushaltsgröße



Konzept der Dichtefunktion

Beispiel:
Wir betrachten eine Zufallsvariable T mit Wertebereich im Intervall $[0; 10]$

Warten auf den Bus, der alle 10 Minuten fährt. T kann also jeden Wert zwischen 0 und 10 annehmen.

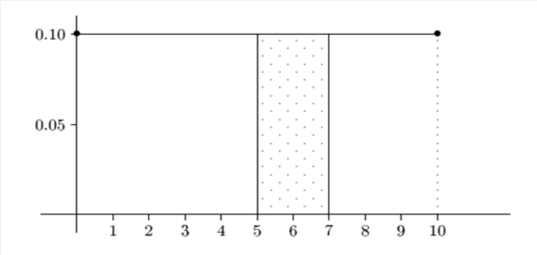
gesucht: $P(T=2) = ?$

$P(T=2) = P(1.5 < T < 2.5) = 1/10$

$P(T=2) = P(1.99 < T < 2.01) = 2/1000$

$P(T=2) = 0$???

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten



$$P(5 \leq T \leq 7) = \text{Fläche unter der Kurve}$$

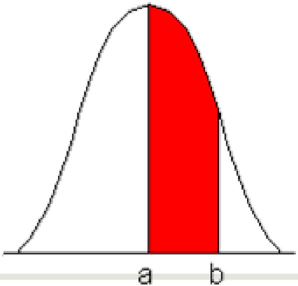
Dichtefunktion

Definition Dichtefunktion

Eine Zufallsvariable X heißt stetig, wenn es eine Funktion $f(x) \geq 0$ gibt, so dass für jedes Intervall $[a, b]$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \text{Fläche zwischen } a \text{ und } b \text{ unter der Funktion}$$

gilt. f heißt dann Dichtefunktion der Zufallsgröße



Eigenschaften der Dichte

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $\mathrm{F(t)} = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$
- $F'(x) = f(x)$ (Dichte ist Ableitung der Verteilungsfunktion)

Beispiel: Warten auf den Bus

- Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1x & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

- Dichtefunktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 0.1 & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

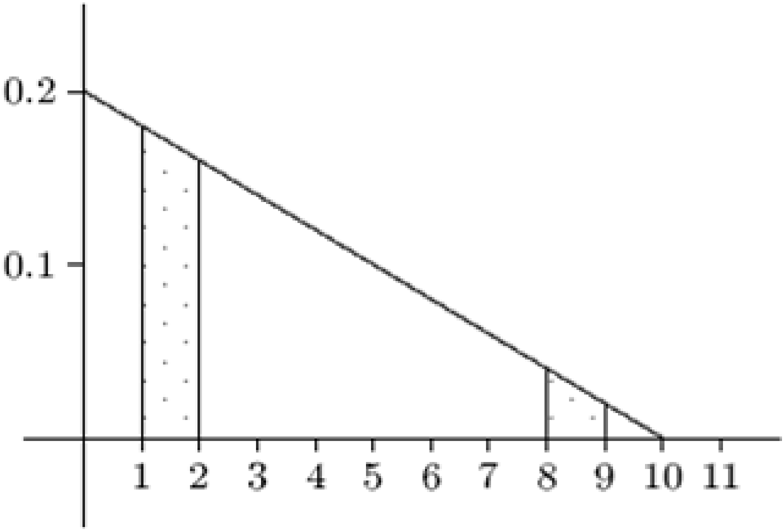
Eigenschaften von stetigen Zufallsgrößen

Für eine stetige Zufallsgröße X mit Verteilungsfunktion F gilt für alle a und b

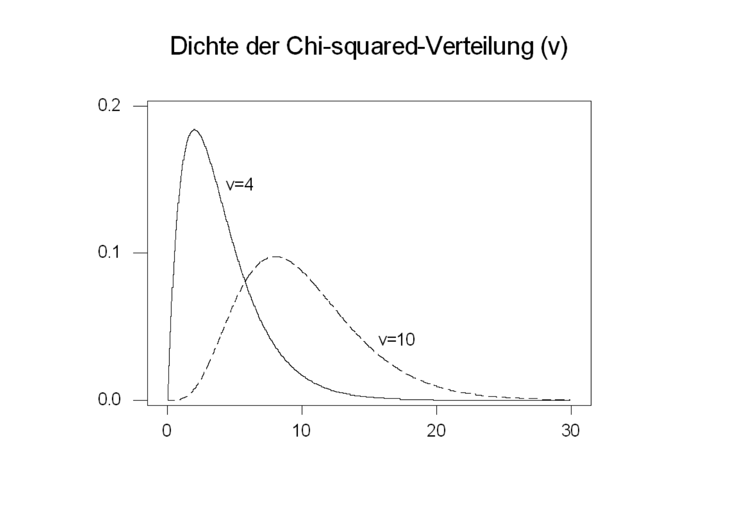
$$\begin{aligned} P(X = a) = P(X = b) &= 0 \\ P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) \\ P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) \\ P(a < X < b) &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

.

Warten auf den Bus (2): Interpretation ?



Warten auf den Bus (3): Interpretation ?



Bemerkungen

- Stetige Zufallsvariablen sind für die Modellbildung sehr wichtig
- Insbesondere ergeben sich Approximationsmöglichkeiten für diskrete durch stetige Zufallsvariablen bei größeren Stichprobenumfängen

Erwartungswert und Varianz

Ziel: Charakterisiere Verteilungen von Zufallsvariablen durch Kenngrößen (in Analogie zu Lage- und Streuungsmaßen der deskriptiven Statistik).

Insbesondere:

a) „durchschnittlicher Wert“ $\longrightarrow$ Erwartungswert, z.B.

- „mittleres“ Einkommen,
- „durchschnittliche“ Körpergröße,
- fairer Preis eines Spiels.

b) Streuung (Dispersion), z.B. wie stark schwankt das Einkommen, die Körpergröße etc.

Erwartungswert diskreter Zufallsgrößen

X sei eine diskrete Zufallsgröße mit den möglichen Werten $x_1, \ldots, x_n$.

Dann ist der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

„Der Wert, der sich bei häufiger Wiederholung als Mittelwert ergibt.“

Beispiele Erwartungswert

- Würfelwurf:
  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$

- Summe zweier Würfel:
  $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \ldots + \frac{2}{36} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12 = 7$

- Antwort ja oder nein:
  $\mathbb{E}(X) = P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 1) \cdot 1 = P(X = 1)$

- Wette mit Einsatz E und Gewinn 1 bei Gewinnwahrscheinlichkeit p
  $\mathbb{E}(X) = p \cdot (1 - E) + (1 - p) \cdot (-E) = p - pE - E + pE = p - E$
  Erwarteter Gewinn positiv, falls $E < p$.

Erwartungswert stetiger Zufallsgrößen

Erwartungswert stetiger ZG:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Integral statt Summe, Dichte statt Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Warten auf den Bus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{0}^{10} \frac{1}{10} x dx = 5
\end{aligned}$$

Varianz und Standardabweichung von Zufallsgrößen

- Lageparameter: Erwartungswert
- Streuungsparameter: Varianz und Standardabweichung

Wie stark weichen die Ausprägungen im Durchschnitt vom Erwartungswert ab?

diskret: $$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \, P(X = x_i)$$

stetig: $$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, f(x) dx$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Beispiel I zur Varianz

Y: Einmal Würfeln und Multiplikation mit 2

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= 7 \\
Var(Y) &= \frac{1}{6} \cdot (2-7)^2 + \frac{1}{6} \cdot (4-7)^2 + \frac{1}{6} \cdot (6-7)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \cdot (8-7)^2 + \frac{1}{6} \cdot (10-7)^2 + \frac{1}{6} \cdot (12-7)^2 \\
&= 11.67 \\
\sigma &= 3.41
\end{aligned}
$$

Beispiel II zur Varianz II

S: Würfeln mit 2 Würfeln

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= 7 \\
Var(S) &= \frac{1}{36}\cdot(2-7)^2+\frac{2}{36}\cdot(3-7)^2+\frac{3}{36}\cdot(4-7)^2+\ldots \\
&\quad +\frac{2}{36}\cdot(11-7)^2+\frac{1}{36}\cdot(12-7)^2 \\
&= 5.833 \\
\sigma &= 2.41
\end{aligned}$$

Varianz bei der Wartezeit auf den Bus

$$
\begin{aligned}
Var(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-5)^2 f(x) dx \\
&= \int_{0}^{10} (x-5)^2 \frac{1}{10} dx \\
&= \frac{25}{3} \\
\sigma_T &= \sqrt{\frac{25}{3}} = 2.9
\end{aligned}
$$

Bemerkungen

- Die Varianz gibt die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert an. Durch das Quadrieren werden Abweichungen nach unten (negative Werte) auch positiv gezählt.
- Damit Erwartungswert und Varianz sinnvoll interpretiert werden können, muss eine metrische Skala zugrundeliegen.
- Allgemein bezeichnet man $\mathbb{E}(X^k)$ als *k-tes Moment*.

Verschiebungssatz

Es gilt:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Quadrat in der Klammer | Quadrat außerhalb der Klammer

- Verschiebungssatz für theoretische Überlegungen und Übungsaufgaben gutes Hilfsmittel
- Für Berechnungen mit dem Computer sollte er nicht benutzt werden (numerische Probleme)

Erwartungswert von linearen Transformationen

Der Erwartungswert lässt sich bei linearen Transformationen berechnen durch:

$Y = a + b \cdot X$

Dann folgt:

$$\mathbb{E}(Y) = a + b \cdot \mathbb{E}(X)$$

„Erwartungswert ist linear“

Beispiel

Einfacher Würfelwurf: X
Lineare Transformation: $Y = 10 \cdot X - 20$

„Ich zahle 20 € und erhalte das 10fache meiner Zahl.“

$\mathbb{E}(Y) = 10 \cdot \mathbb{E}(X) - 20 = 10 \cdot 3.5 - 20 = 15$

„Ich gewinne im Mittel 15 € pro Spiel.“

Varianz von linearen Transformationen

$Y = a + b \cdot X$

$Var(Y) = b^2 \cdot Var(X)$
$\sigma_Y = |b| \cdot \sigma_Y$

Verschiebungen ändern nichts an Streuung

Beispiel zur Varianz

X: Einmal Würfeln
Y: Einmal Würfeln und Multiplikation mit 2

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{1}{6}\cdot(1-3.5)^2+\frac{1}{6}\cdot(2-3.5)^2+\frac{1}{6}\cdot(3-3.5)^2\\
&\quad+\frac{1}{6}\cdot(4-3.5)^2+\frac{1}{6}\cdot(5-3.5)^2+\frac{1}{6}\cdot(6-3.5)^2\\
&= 2.917\\
\sigma_X &= 1.705
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= 4\cdot 2.917 = 11.67\\
\sigma_Y &= 2\cdot 1.705 = 3.41
\end{aligned}
$$

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Zwei Zufallsgrößen X und Y heißen unabhängig, falls alle zu X gehörigen Ereignisse von allen zu Y gehörigen Ereignissen unabhängig sind.

Beispiele:

X: Antwort der 1. Person
Y: Antwort der 2. Person

X: 1. Würfelwurf
Y: 2. Würfelwurf

Erwartungswert von Summen von Zufallsgrößen

Für beliebige Zufallsgrößen X_1 und X_2 gilt:

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$$

Beispiele:

- zweimaliges Würfeln
- Ziehen von 2 Personen

Beachte: Unabhängigkeit wird nicht vorausgesetzt

Varianz von Summen von Zufallsgrößen

Für **unabhängige** Zufallsgrößen X_1 und X_2 gilt:

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$$

Beispiele:

- zweimaliges Würfeln
- Ziehen von 2 Personen

Beachte: Unabhängigkeit ist wichtige Voraussetzung

Bemerkungen I

- Der Erwartungswert ist immer additiv aufspaltbar, die Varianz dagegen nur bei Unabhängigkeit!
- Die Additivität der Varianz unter Unabhängigkeit gilt nicht für die Standardabweichung σ:

$$\sqrt{\text{Var}(X+Y)} \neq \sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)}$$

- Man beachte explizit, dass gilt $\text{Var}(-X) = \text{Var}(X)$ und damit unter Unabhängigkeit

$$\text{Var}(X-Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

$$\text{Var}(X-Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(-Y) = \text{Var}(X) + (-1)^2 \cdot \text{Var}(Y)$$

Bemerkungen II

Im Allgemeinen gilt:

$$\mathbb{E}(g(X)) \neq g(\mathbb{E}(X))$$

also z.B.

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \neq \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$$

und

$$\mathbb{E}(X^2) \neq (\mathbb{E}(X))^2.$$

Standardisierte Zufallsvariable

Standardisierung

Die Zufallsvariable

$$Z := \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

heißt *standardisierte Zufallsvariable*. Es gilt

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(Z) = 1.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \cdot \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \cdot (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X))) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \cdot (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) = 0 \\
\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} - \frac{\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 1
\end{aligned}$$

Beispiel: Chuck-a-Luck

Beim Spiel Chuck-a-Luck werden drei Würfel geworfen. Der Spieler setzt auf eine der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Zeigt keiner der Würfel die gesetzte Zahl, so ist der Einsatz verloren. Andernfalls erhält der Spieler (zusätzlich zu seinem Einsatz) für jeden Würfel, der die gesetzte Zahl zeigt, einen Betrag in Höhe des Einsatzes. Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gewinns nach einem Spiel:

G = Gewinn	Würfelkombinationen	Anzahl	Wahrscheinlichkeit
3	666	1	1/216
2	66a, 6a6, a66 mit a=1,2,3,4,5	15	15/216
1	6ab, a6b, ab6, mit a,b=1,2,3,4,5	75	75/216
-1	abc mit a,b,c=1,2,3,4,5	125	125/216
Summe		216	1

Chuck-a-Luck: Erwartungswert

Für den Erwartungswert erhält man

$$E(G) = 3 \cdot \frac{1}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} - 1 \cdot \frac{125}{216} = -\frac{17}{216} = -0.078$$

also einen erwarteten Verlust von 7.8% des Einsatzes.

Chuck-a-Luck: Spielstrategie

Betrachte die Zufallsvariablen:

$X_1, X_2, \ldots, X_6$	Gewinn, wenn beim ersten Wurf ein Einsatz auf $1, 2, \ldots, 6$ gesetzt wird.
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_6$	Gewinn, wenn beim zweiten Wurf ein Einsatz auf $1, 2, \ldots, 6$ gesetzt wird.

Mögliche Spielstrategien und zugehörige Gewinne:

$2X_6$	Gewinn, wenn beim ersten Wurf ein zweifacher Einsatz auf 6 gesetzt wird (Strategie 1).
$X_1 + X_6$	Gewinn, wenn beim ersten Wurf jeweils ein Einsatz auf 1 und 6 gesetzt wird (Strategie 2).
$X_6 + Y_6$	Gewinn, wenn beim ersten und zweiten Wurf ein Einsatz auf 6 Gesetzt wird (Strategie 3).

Chuck-a-Luck: Erwartungswerte

- Erwartungswerte:

  Aus $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(Y_i) = -\frac{17}{216}$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(2X_6) &= 2\,\mathbb{E}(X_6) = -\frac{34}{216} \\ \mathbb{E}(X_1 + X_6) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_6) = -\frac{34}{216} \\ \mathbb{E}(X_6 + Y_6) &= \mathbb{E}(X_6) + \mathbb{E}(Y_6) = -\frac{34}{216} \end{aligned}$$

  d.h. bei den drei Strategien sind die Erwartungswerte alle gleich!

- Trotzdem gibt es deutliche Unterschiede in den drei Strategien:

Strategie	Wertebereich	$P(\{-2\})$
$2X_6$	-2,2,4,6	0.579
$X_1 + X_6$	-2,0,1,2,3	0.296
$X_6 + Y_6$	-2,0,1,2,3,4,5,6	0.335

Chuck-a-Luck: Varianz

- Varianz des Gewinns nach einem Spiel

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(G) &= \left(3+\frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{1}{216} + \left(2+\frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{15}{216} + \left(1+\frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{75}{216} \\ &+ \left(-1+\frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{125}{216} \\ &= 0.04388156 + 0.30007008 + 0.40402836 + 0.4911961 = \\ &= 1.2391761 \\ \sqrt{\mathrm{Var}(G)} &= 1.113183\end{aligned}$$

- Nach den Rechenregeln für Varianzen erhält man für die Strategien 1 und 3:

$$\mathrm{Var}(2X_6) = 4\,\mathrm{Var}(X_6) = 4 \cdot 1.2391761 = 4.956704$$

und

$$\mathrm{Var}(X_6+Y_6) = \mathrm{Var}(X_6)+\mathrm{Var}(Y_6) = 1.2391761+1.2391761 = 2.4783522.$$

Chuck-a-Luck: Varianz

- Da X_1 und X_6 nicht unabhängig sind, muss hier die Varianz explizit berechnet werden.
- Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_1 + X_6$:

x	-2	0	1	2	3
$P(X_1 + X_2 = x)$	0.29630	0.44444	0.11111	0.12037	0.02778

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_1 + X_6) &= \left(-2 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.29630 + \left(0 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.44444 + \\
&\quad + \left(1 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.11111 + \left(2 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.12037 + \\
&\quad + \left(3 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.02778 = \\
&= 2.003001
\end{aligned}
$$

Chuck-a-Luck: Fazit

* Strategie 1, also $2X_6$, ist am riskantesten.
* Die Gewinnchancen sind bei Strategie 1 aber größer als bei Strategie 2.
* Am wenigsten riskant ist Strategie 2.