Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017

Bernoulliverteilung

Definition Bernoulliverteilung

Ein Experiment mit nur zwei Ergebnissen ($1 =$ Erfolg, $0 =$ Misserfolg) gehorcht einer Bernoulliverteilung.

Kurzschreibweise: $X \sim B(1, p)$

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{falls } x = 1 \\ 1 - p & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Bernoulliverteilung

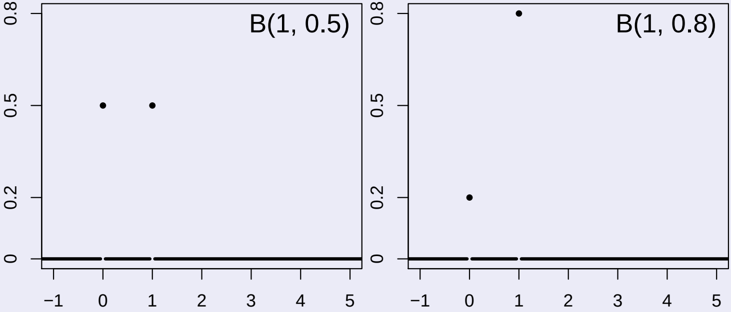
Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p\,(1 - p)$$

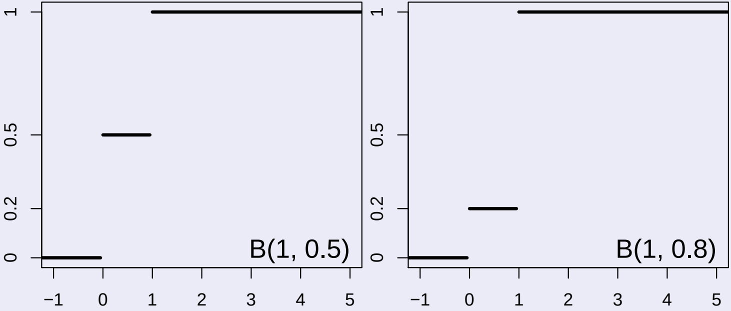
Bernoulliverteilung

graphische Beispiele der Wahrscheinlichkeitsfunktion



Bernoulliverteilung

graphische Beispiele der Verteilungssfunktion



Bernoulliverteilung

Beispiel

Betrachtet wird das Ergebnis eines einmaligen Münzwurfs mit einer unfairen Münze:

$$\text{Ausprägungen: } 1 \text{ (Kopf)}, 0 \text{ (Zahl)}$$

$$P(X = 1) = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{2}{3} \cdot (1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{9}$$

Binomialverteilung

Definition Binomialverteilung

Werden n *unabhängige* und *identische* Bernoulliexperimente durchgeführt, so folgt die *Anzahl der Erfolge* einer Binomialverteilung.

Kurzschreibweise: $X \sim B(n, p)$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, ..., n$$

Binomialverteilung

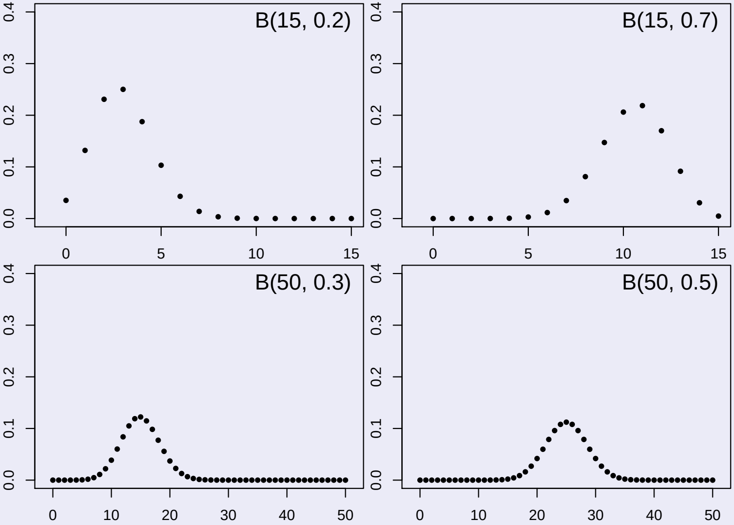
Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np\,(1-p)$$

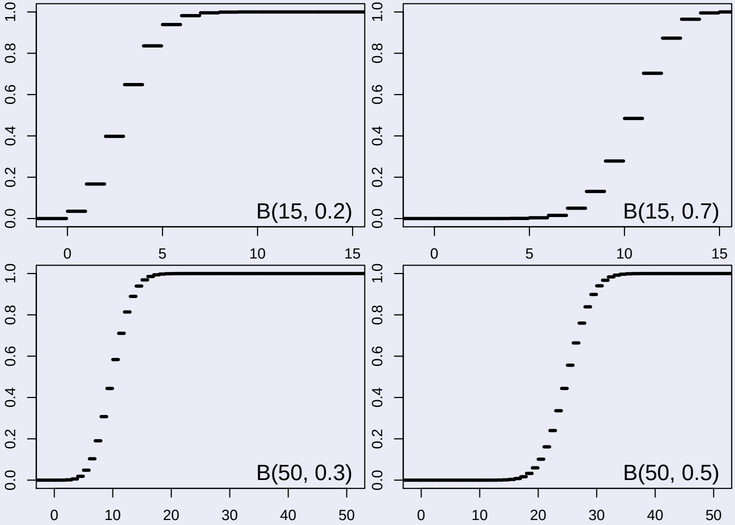
Binomialverteilung

graphische Beispiele der Wahrscheinlichkeitsfunktion



Binomialverteilung

graphische Beispiele der Verteilungssfunktion



Binomialverteilung

Beispiel

Betrachtet wird die Anzahl des Ereignisses „Kopf oben" beim zehnmaligen Münzwurf mit einer unfairen Münze:

$$n = 10$$

$$p = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = 10 \cdot \frac{2}{3} = 6,67$$

$$Var(X) = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2,22$$

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{10-7} = 0,26$$

Beispiel: Wahlprognose

- 100 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte werden befragt.
- 30% aller Wahlberechtigten wählen Partei S.

→ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 100 Befragten mehr als 50 die Partei S wählen?

$X \sim B(100, 0.3)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 50) &= P(X = 50) + P(X = 51) + \ldots + P(X = 100) \\ &= \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} \cdot 0.3^{50} \cdot 0.7^{50} + \ldots \\ &= 0.00002206 \end{aligned}$$

geometrische Verteilung

Definition geometrische Verteilung

Interessiert man sich für die *Anzahl* der Versuche, bis bei einem Bernoulliexperiment ein Erfolg beobachtet wird, so folgt dieser Versuchsaufbau einer geometrischen Verteilung.

Kurzschreibweise: $X \sim G(p)$

$$P(X = x) = p\,(1-p)^{x-1}, \quad x \in \mathbb{N}$$

geometrische Verteilung

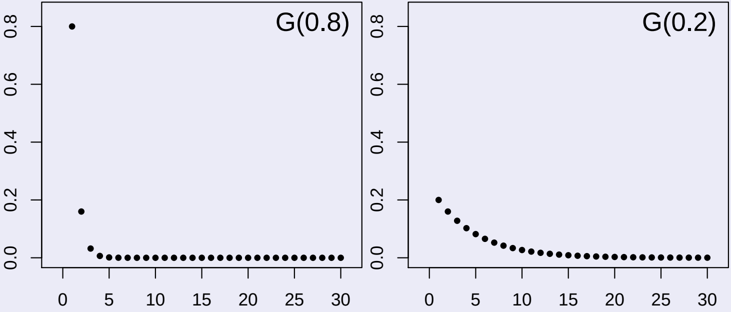
Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

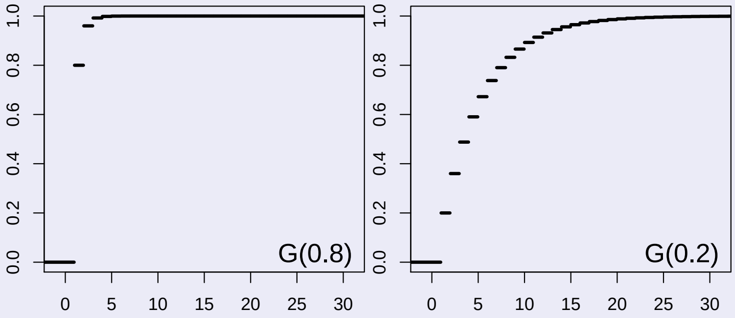
geometrische Verteilung

graphische Beispiele der Wahrscheinlichkeitsfunktion



geometrische Verteilung

graphische Beispiele der Verteilungssfunktion



geometrische Verteilung

Beispiel

Betrachtet wird die Anzahl der Würfe, bis eine 1 gewürfelt wird.
Dies ist geometrisch verteilt mit $p = \frac{1}{6}$, also $X \sim G(\frac{1}{6})$.

$$E(X) = \frac{1}{1/6} = 6$$

$$Var(X) = \frac{1}{1/6}(\frac{1}{1/6} - 1) = 30$$

Im Mittel fällt beim sechsten Wurf eine 1.

Poissonverteilung

Definition Poissonverteilung

Soll die Wahrscheinlichkeit für die *Häufigkeit* bzw. *Anzahl* des Eintretens eines bestimmten Ereignisses innerhalb eines *fest vorgegebenen Intervalls* der Länge t (hier nur $t = 1$) beschrieben werden, so lässt sich dies mit einer Poissonverteilung modellieren.

Kurzschreibweise: $X \sim Po(\lambda), \quad \lambda > 0$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \exp(-\lambda), \quad x \in \mathbb{N}_0$$

Poissonverteilung

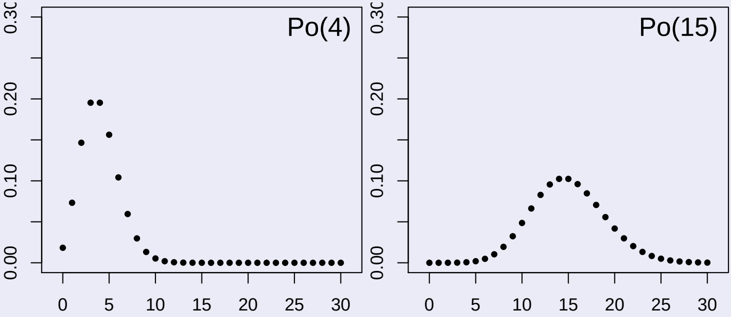
Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

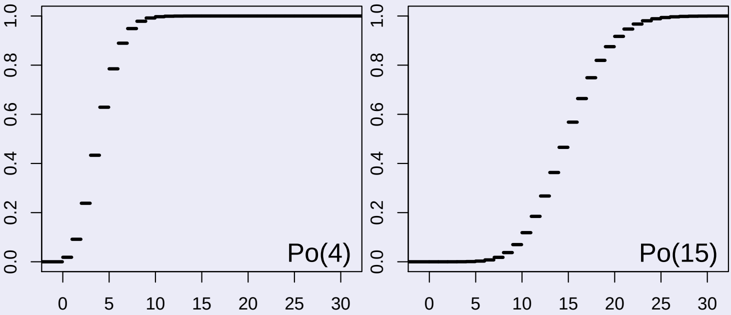
Poissonverteilung

graphische Beispiele der Wahrscheinlichkeitsfunktion



Poissonverteilung

graphische Beispiele der Verteilungssfunktion



Poissonverteilung

Additionssatz

Sind $X \sim Po(a)$ und $Y \sim Po(b)$ unabhängige Zufallsvariablen, dann gilt:

$$X + Y \sim Po(a + b).$$

Poissonverteilung

Beispiel

Bei einer Hotline weiß man aus Erfahrung, dass dort am Freitag zwischen 15 und 16 Uhr 7 ($= \lambda$) Kunden den Dienst in Anspruch nehmen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mal 9 Kunden sind, beträgt:

$$P(X = 9) = \frac{7^9}{9!} \cdot \exp(-7) = 0,1014.$$

Exponentialverteilung

Definition Exponentialverteilung

Wird die stetige Wartezeit bis zum Eintreten eines Ereignisses betrachtet und wird gefordert, dass die weitere Wartezeit unabhängig von der bereits verstrichenen Wartezeit ist, so bietet sich die Exponentialverteilung zur Modellierung dieses Problems an.

Kurzschreibweise: $X \sim Expo(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung ist damit das stetige Analogon zur geometrischen Verteilung.

Exponentialverteilung

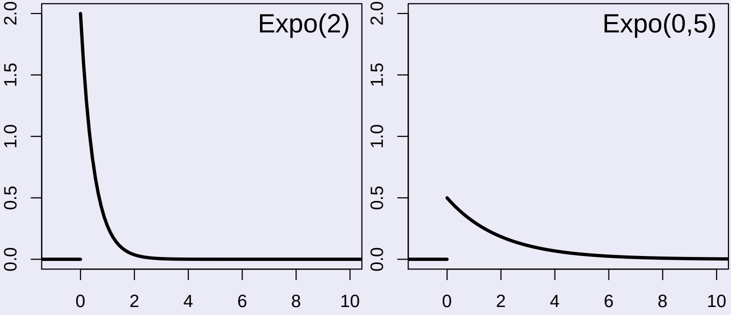
Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

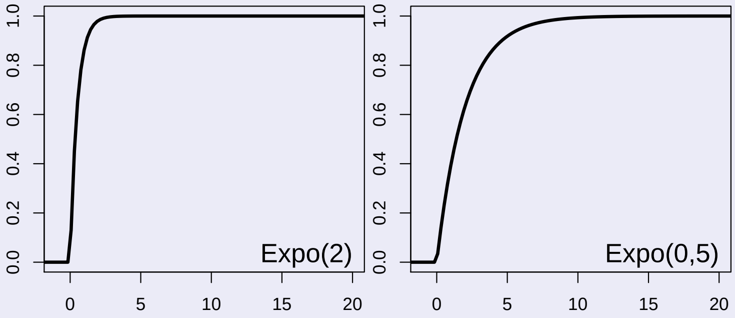
Exponentialverteilung

graphische Beispiele der Dichtefunktion



Exponentialverteilung

graphische Beispiele der Verteilungssfunktion



Exponentialverteilung

Zusammenhang zwischen Exponential- und Poissonverteilung

Die Anzahl der Ereignisse Y innerhalb eines Kontinuums ist poissonverteilt mit Parameter λ genau dann, wenn die Wartezeit zwischen zwei Ereignissen exponentialverteilt mit Parameter λ ist.

Exponentialverteilung

Beispiel

Die Zufallsvariable X: „Lebensdauer einer Glühbirne einer Schaufensterbeleuchtung“ sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 10$. Damit gilt:

$$E(X) = \frac{1}{10}; \quad Var(X) = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

Die Zufallsvariable Y: „Anzahl der ausgefallenen Glühbirnen“ ist damit poissonverteilt mit Parameter $\lambda = 10$ und damit $E(Y) = 10$ sowie $Var(Y) = 10$.

Betrachten wir als Kontinuum ein Jahr, so erhalten wir für die erwartete Anzahl der ausgefallenen Glühbirnen pro Jahr

$$E(Y) = 10 \text{ Glühbirnen pro Jahr}$$

und für die zu erwartende Wartezeit zwischen zwei Ausfällen

$$E(X) = \frac{1}{10} \text{ Jahr} = 36,5 \text{ Tage.}$$

Pareto-Verteilung

Verteilung zur Modellierung von Einkommen Kurzschreibweise: $X \sim Pareto(k, \alpha)$ Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha} & \text{für } x \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte :

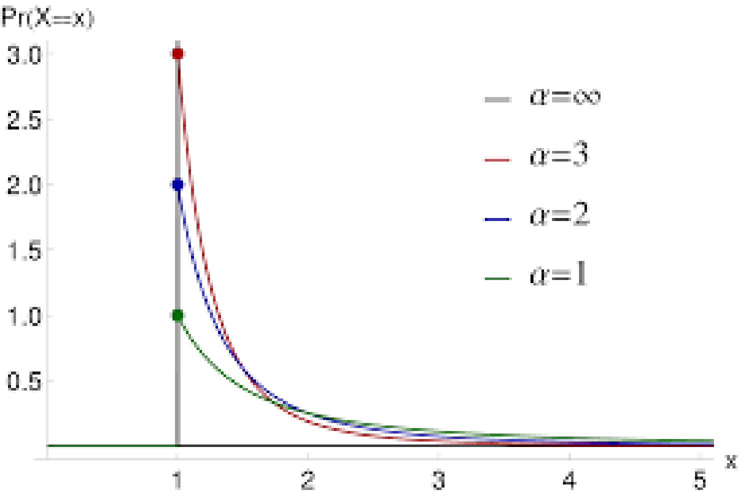
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & \text{für } x \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} k$$

Pareto-Verteilung

graphische Beispiele der Dichtefunktion



Normalverteilung

Definition Normalverteilung

Die Normalverteilung ist die in der Statistik am häufigsten verwendete stetige Verteilung. Ihre Verteilung liegt (recht) eng und symmetrisch um ihren Erwartungswert.

Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Anwendungen

- viele Zufallsvariablen sind (nach Transformation) (ungefähr) normalverteilt.
- beim Zusammenwirken vieler zufälliger Einflüsse ist der geeignet aggregierte Gesamteffekt oft approximativ normalverteilt (Zentraler Grenzwertsatz).
- die asymptotische Grenzverteilung, also die Verteilung bei unendlich großem Stichprobenumfang, typischer statistischer Größen ist die Normalverteilung.

Normalverteilung

Erwartungswert und Varianz

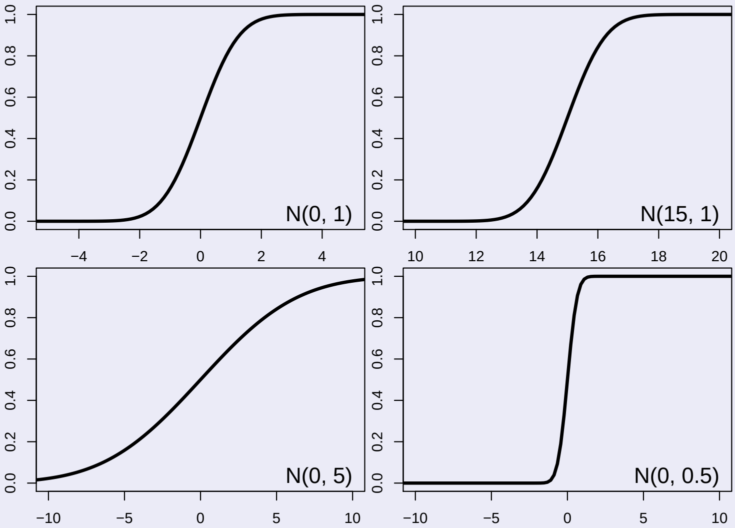
$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Dies sind zugleich die Parameter der Verteilung.

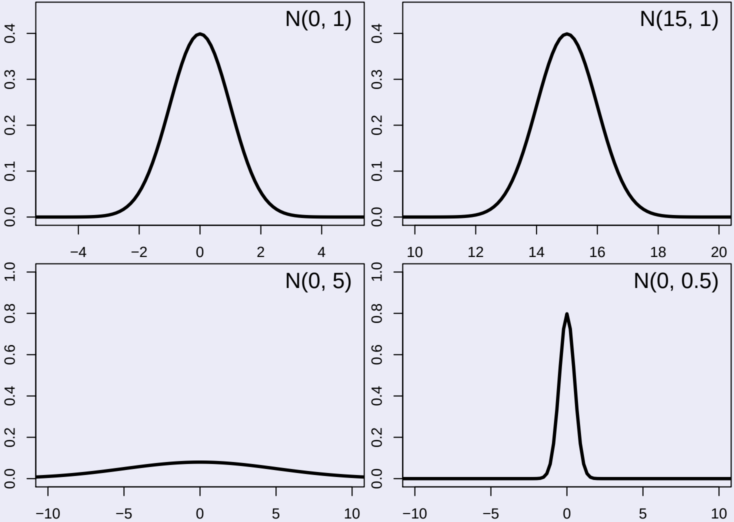
Normalverteilung

graphische Beispiele der Verteilungssfunktion

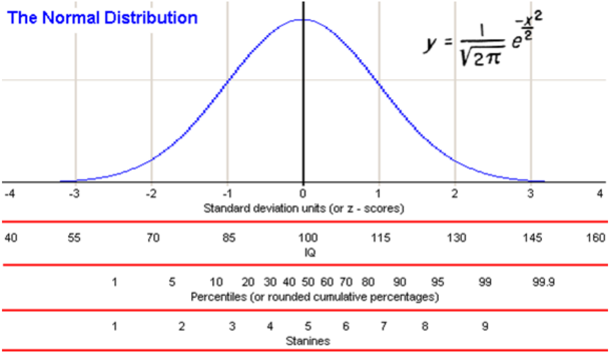


Normalverteilung

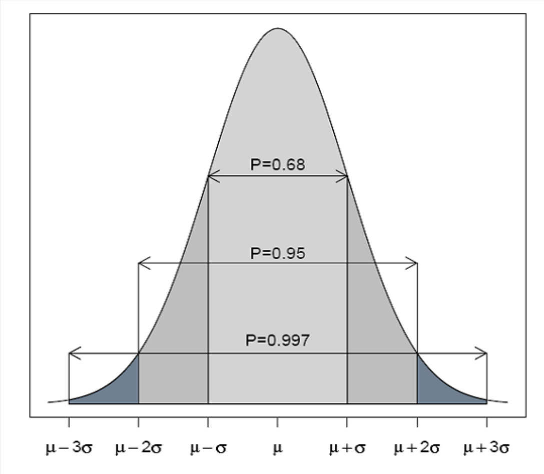
graphische Beispiele der Dichtefunktion



Normalverteilung II



Normalverteilung III



Normalverteilung

Standardisierung

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann ist

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Normalverteilung

Häufig kommen unabhängig und identisch verteilte Zufallsgrößen vor. Man spricht dann von **iid** (**i**ndependently **i**dentically **d**istributed) Zufallsgrößen.

Additionssatz

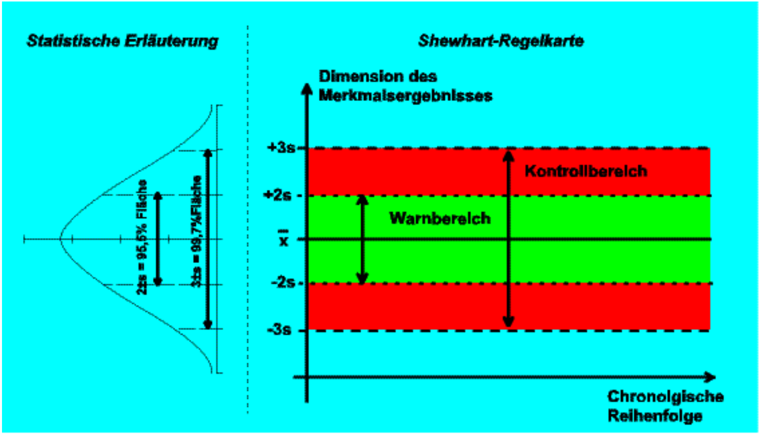
Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, dann ist deren Summe normalverteilt:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right).$$

Das arithmetische Mittel der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ ist ebenfalls normalverteilt:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

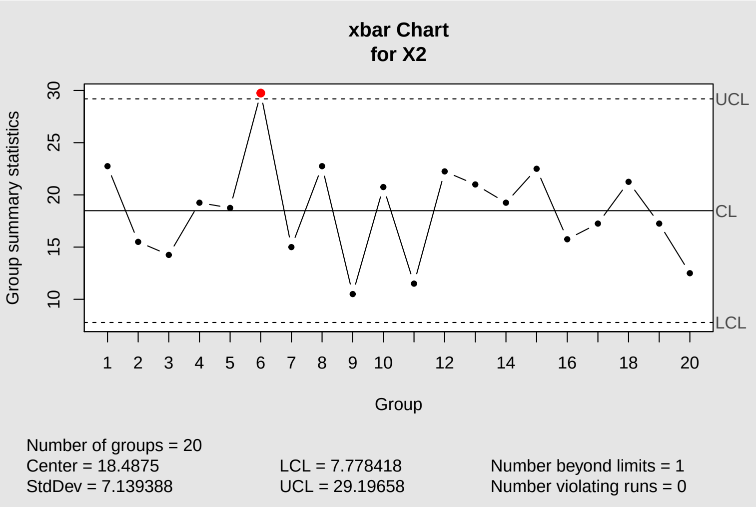
Anwendung aus der Qualitätskontrolle



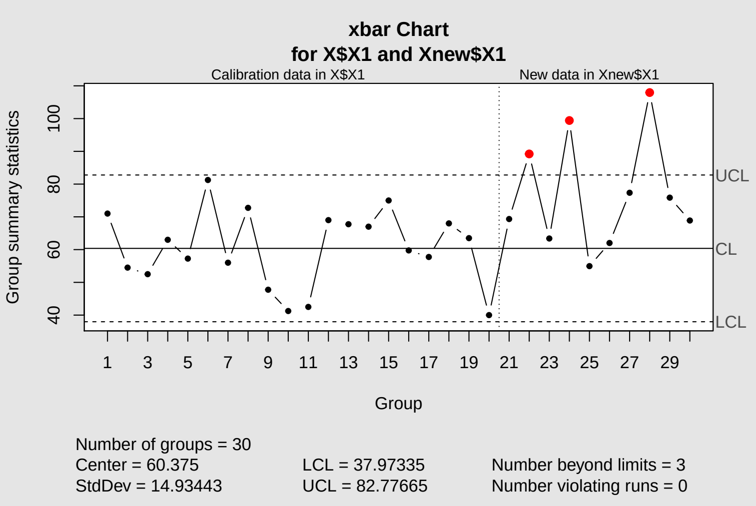
Beispiel mit Proben von 4 Einheiten

Eingriffsgrenzen:

$$\bar{X} + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4}}$$



Beispiel mit Proben von 4 Einheiten



Normalverteilung

Rechenregeln

- Sei $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung zu einer beliebigen Normalverteilung $F(x)$.
- Seien a und b beliebige reelle Zahlen, $z_a = \frac{a-\mu}{\sigma}$ und $z_b = \frac{b-\mu}{\sigma}$ deren Standardisierungen und
- sei z ein beliebiges Quantil der Standardnormalverteilung.

Dann gilt:

$$P(X \leq b) = F(b) = \Phi(z_b)$$
$$P(X > b) = 1 - \Phi(z_b)$$
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a)$$
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$
$$\Phi(0) = 0,5$$
$$P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(z_a) - 1$$

Normalverteilung

wichtige Quantile der Standardnormalverteilung

Quantile, die oft beim Testen von Hypothesen verwendet werden:

$\alpha = 0,05$: $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,64$

$\alpha = 0,05$: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} = 1,96$

$\alpha = 0,01$: $z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2,33$

$\alpha = 0,01$: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,995} = 2,58$

Quantilbestimmung

Ein beliebiges Quantil x_p einer nichtstandardisierten Normalverteilung kann durch folgende Rechnung bestimmt werden:

$$x_p = \mu + \sigma \cdot z_p$$