

# Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017



- Einführung
- 1 Wahrscheinlichkeit: Definition und Interpretation
- 2 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
- 3 Zufallsgrößen
- 4 Spezielle Zufallsgrößen
- 5 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 6 Grenzwertsätze
- 7 Statistische Inferenz: Punktschätzer**

**Ziel:** Etwas über die reale Welt lernen, indem man Daten auswertet

- 1 Schlüsse von Stichprobendaten auf die Grundgesamtheit
- 2 Schlüsse von Experimentaldaten auf ein allgemeines Phänomen
- 3 Schlüsse von Beobachtungsdaten auf allgemeine Zusammenhänge
- 4 Prognosen für die Zukunft mit Hilfe von Daten aus der Vergangenheit

Beispiele :

- 1 Analysen aus dem SOEP (Sozioökonomisches Panel ), Wahlumfragen
- 2 Klinische Studie zur Wirkung eines Medikaments
- 3 Verkäufe und Fernsehwerbung
- 4 Wirtschaftsprognosen (Wachstum, Inflation etc. )

- Stichprobe zufällig gezogen
- Ergebnis von Experiment enthält stochastische Komponenten
- Modelle für Beobachtungen enthalten stochastische Terme und Annahmen

## Inhalte

- 1 Berücksichtigung der Zufälligkeit
- 2 Folgen gibt für die Aussagekraft
- 3 Fehlerabschätzung

- Stichprobe sollte zufällig sein
- Experimentelle Situation
- Nicht nötig (geeignet) bei Vollerhebungen
- Nicht geeignet bei Vollerhebungen mit geringem Rücklauf

## Beispiel:

Parameter: Mittelwert der täglichen Fernsehdauer von Jugendlichen in Deutschland

Schätzung: Mittelwert der Fernsehdauer in der Stichprobe  
oder: Median aus der Stichprobe?  
oder: Mittelwert ohne größten und kleinsten Wert?

# Beispiel 1: Schätzer $\bar{X}$

Grundgesamtheit

1	2	3	4	5
1.30	1.31	1.32	1.40	1.42

Wahrer Wert: 1.35

Ziehe Stichprobe vom Umfang  $n=2$  und berechne  $\bar{X}$

$S_1$	$S_2$	$\bar{X}$	P
1	2	1.305	0.1
1	3	1.310	0.1
1	4	1.350	0.1
1	5	1.360	0.1
2	3	1.315	0.1
2	4	1.355	0.1
2	5	1.365	0.1
3	4	1.360	0.1
3	5	1.370	0.1
4	5	1.410	0.1

„Pech“

# Beispiel 1: Schätzer $\bar{X}$

Grundgesamtheit

1	2	3	4	5
1.30	1.31	1.32	1.40	1.42

Wahrer Wert: 1.35

Ziehe Stichprobe vom Umfang  $n=2$  und berechne  $\bar{X}$

$S_1$	$S_2$	$\bar{X}$	P
1	2	1.305	0.1
1	3	1.310	0.1
1	4	1.350	0.1
1	5	1.360	0.1
2	3	1.315	0.1
2	4	1.355	0.1
2	5	1.365	0.1
3	4	1.360	0.1
3	5	1.370	0.1
4	5	1.410	0.1

“Glück “



**Beachte:** Auswahl zufällig  $\Rightarrow$  Schätzung zufällig

- Die Merkmale der gezogenen  $n$  Einheiten sind also Zufallsgrößen.
- Bezeichnung:  $X_1, \dots, X_n$ .
- Wird der Parameter einer Merkmalsverteilung durch eine Funktion der Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  der Stichprobe geschätzt, so spricht man bei diesem Vorgang von **Punktschätzung**.
- Die dabei benutzte Funktion wird auch **Schätzfunktion**, **Schätzstatistik** oder kurz **Schätzer** genannt.

## Definition

Sei  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. Stichprobe. Eine Funktion

$$T = g(X_1, \dots, X_n)$$

heißt *Schätzer* oder *Schätzfunktion*.

Inhaltlich ist  $g(\cdot)$  eine Auswertungsregel der Stichprobe:  
„Welche Werte sich auch in der Stichprobe ergeben, ich wende das durch  $g(\cdot)$  beschriebene Verfahren auf sie an.(z.B. Mittelwert)“

# Beispiele für Schätzfunktionen I

---

- Arithmetisches Mittel der Stichprobe:

$$\bar{X} = g(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Für binäre (0-1)-Größen  $X_i$  ist  $\bar{X}$  auch die relative Häufigkeit des Auftretens von „ $X_i = 1$ “ in der Stichprobe

- Stichprobenvarianz:

$$S^2 = g(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2 \right)$$

# Beispiele für unübliche Schätzfunktionen II

---

- Größter Stichprobenwert:

$$X_{(n)} = g(X_1, \dots, X_n) = \max_{i=1, \dots, n} X_i$$

- Kleinster Stichprobenwert:

$$X_{(1)} = g(X_1, \dots, X_n) = \min_{i=1, \dots, n} X_i$$

## Erwartungstreue, Bias:

Gegeben sei eine Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  und eine Schätzfunktion  $T = g(X_1, \dots, X_n)$  (mit existierendem Erwartungswert).

- $T$  heißt *erwartungstreu für den Parameter  $\vartheta$* , falls gilt

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(T) = \vartheta$$

für alle  $\vartheta$ .

- Die Größe

$$\text{Bias}_{\vartheta}(T) = \mathbb{E}_{\vartheta}(T) - \vartheta$$

heißt *Bias* (oder *Verzerrung*) der Schätzfunktion. Erwartungstreue Schätzfunktionen haben per Definition einen Bias von 0.

Man schreibt  $\mathbb{E}_{\vartheta}(T)$  und  $\text{Bias}_{\vartheta}(T)$ , um deutlich zu machen, dass die Größen von dem wahren  $\vartheta$  abhängen.

# Bias und Erwartungstreue für $\bar{X}$

---

Das arithmetische Mittel  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  ist erwartungstreu für den Mittelwert  $\mu$  einer Grundgesamtheit

Aus  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. und  $\mathbb{E}_\mu(X_1) = \mathbb{E}_\mu(X_2) = \dots = \mu$  folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}) &= \mathbb{E}_\mu \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}_\mu \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu\end{aligned}$$

## Bias und Erwartungstreue für $S^2$

Es gilt (Beachte Division durch  $n$ ) :

$$\mathbb{E}_{\sigma^2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n}$$

Man erhält also einen (leicht) verzerrten Schätzer  
Für die Stichprobenvarianz gilt daher:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\sigma^2}(S^2) &= \mathbb{E}_{\sigma^2} \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \\ &= \mathbb{E}_{\sigma^2} \left( \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \\ &= \mathbb{E}_{\sigma^2} \left( \frac{n}{n-1} S^2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Also ist  $S^2$  erwartungstreu für  $\sigma^2$ . Diese Eigenschaft ist auch die  
Motivation für die Division durch  $n-1$ .

# Nichtlineare Funktionen

---

*Vorsicht:* Im Allgemeinen gilt für beliebige, nichtlineare Funktionen  $g$

$$\mathbb{E} g(X) \neq g(\mathbb{E}(X)).$$

Man kann also nicht einfach z.B.  $\sqrt{\cdot}$  und  $\mathbb{E}$  vertauschen. In der Tat gilt:  $S^2$  ist zwar erwartungstreu für  $\sigma^2$ , aber  $\sqrt{S^2}$  ist nicht erwartungstreu für  $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ .



Gegeben sei eine Stichprobe der wahlberechtigten Bundesbürger. Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer des Anteils der rot-grün Wähler an.

Grundgesamtheit: Dichotomes Merkmal

$$\tilde{X} = \begin{cases} 1 & \text{rot/grün: ja} \\ 0 & \text{rot/grün: nein} \end{cases}$$

Der Mittelwert  $\pi$  von  $\tilde{X}$  ist der Anteil der rot/grün-Wähler in der Grundgesamtheit.

Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$ :

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-te Person wählt rot/grün} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Anteil als erwartungstreuer Schätzer

---

Aus den Überlegungen zum arithmetischen Mittel folgt, dass

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für den hier betrachteten Parameter  $\pi$  ist. Also verwendet man die relative Häufigkeit in der Stichprobe, um den wahren Anteil  $\pi$  in der Grundgesamtheit zu schätzen.

# Bedeutung der Erwartungstreue

---

Erwartungstreue alleine ist ein schwaches Kriterium!

Betrachte die offensichtlich unsinnige Schätzfunktion

$$T_2 = g_2(X_1, \dots, X_n) = X_1,$$

d.h.  $T_2 = 100\%$ , falls der erste Befragte rot-grün wählt und  $T_2 = 0\%$  sonst.

Die Schätzfunktion ignoriert fast alle Daten, ist aber erwartungstreu:

$$\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}(X_1) = \mu$$

Deshalb betrachtet man zusätzlich die Effizienz eines Schätzers

Beispiel Wahlumfrage

Gegeben sind zwei erwartungstreue Schätzer ( $n$  sei gerade):

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$T_2 = \frac{1}{n/2} \sum_{i=1}^{n/2} X_i$$

Was unterscheidet formal  $T_1$  von dem unsinnigen Schätzer  $T_2$ , der die in der Stichprobe enthaltene Information nicht vollständig ausnutzt?

Vergleiche die Schätzer über ihre Varianz, nicht nur über den Erwartungswert!

Wenn  $n$  so groß ist, dass der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden kann, dann gilt approximativ

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \pi)}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \pi}{\sqrt{n} \sqrt{\pi(1-\pi)}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N(0; 1)$$

und damit

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\pi; \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right).$$

Analog kann man zeigen:

$$T_2 = \frac{1}{n/2} \sum_{i=1}^{n/2} X_i \sim N \left( \pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n/2} \right).$$

$T_1$  und  $T_2$  sind approximativ normalverteilt, wobei  $T_1$  eine deutlich kleinere Varianz als  $T_2$  hat.

$T_1$  und  $T_2$  treffen beide im Durchschnitt den richtigen Wert  $\pi$ .  $T_1$  schwankt aber weniger um das wahre  $\pi$ , ist also „im Durchschnitt genauer“.

Ein erwartungstreuer Schätzer ist umso besser, je kleiner seine Varianz ist.

$$\text{Var}(T) = \text{Erwartete quadratische Abweichung von } T \text{ von } \underbrace{\mathbb{E}(T)}_{=\vartheta!}$$

Je kleiner die Varianz, umso mehr konzentriert sich die Verteilung eines erwartungstreuen Schätzers um den wahren Wert.

- Gegeben seien zwei erwartungstreue Schätzfunktionen  $T_1$  und  $T_2$  für einen Parameter  $\vartheta$ . Gilt

$$\text{Var}_{\vartheta}(T_1) \leq \text{Var}_{\vartheta}(T_2) \text{ für alle } \vartheta$$

und

$$\text{Var}_{\vartheta^*}(T_1) < \text{Var}_{\vartheta^*}(T_2) \text{ für mindestens ein } \vartheta^*$$

so heißt  $T_1$  *effizienter als*  $T_2$ .

- Eine für  $\vartheta$  erwartungstreue Schätzfunktion  $T$  heißt *UMVU-Schätzfunktion* für  $\vartheta$  (*uniformly minimum variance unbiased*), falls

$$\text{Var}_{\vartheta}(T) \leq \text{Var}_{\vartheta}(T^*)$$

für alle  $\vartheta$  und für alle erwartungstreuen Schätzfunktionen  $T^*$ .



- *Inhaltliche Bemerkung:* Der (tiefere) Sinn von Optimalitätskriterien wird klassischerweise insbesondere auch in der *Gewährleistung von Objektivität* gesehen.
- Ist  $X_1, \dots, X_n$  eine i.i.d. Stichprobe mit  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , dann ist
  - $\bar{X}$  UMVU-Schätzfunktion für  $\mu$  und
  - $S^2$  UMVU-Schätzfunktion für  $\sigma^2$ .

# Verzerre Schätzer

---

- Ist  $X_1, \dots, X_n$  mit  $X_i \in \{0, 1\}$  eine i.i.d. Stichprobe mit  $\pi = P(X_i = 1)$ , dann ist die relative Häufigkeit  $\bar{X}$  UMVU-Schätzfunktion für  $\pi$ .
- Bei nicht erwartungstreuen Schätzern macht es keinen Sinn, sich ausschließlich auf die Varianz zu konzentrieren.
- Z.B. hat der unsinnige Schätzer  $T = g(X_1, \dots, X_n) = 42$ , der die Stichprobe nicht beachtet, Varianz 0.

Man zieht dann den sogenannten *Mean Squared Error*

$$\text{MSE}_{\vartheta}(T) = \mathbb{E}_{\vartheta}(T - \vartheta)^2$$

zur Beurteilung heran. Es gilt

$$\text{MSE}_{\vartheta}(T) = \text{Var}_{\vartheta}(T) + (\text{Bias}_{\vartheta}(T))^2.$$

Der MSE kann als Kompromiss zwischen zwei Auffassungen von Präzision gesehen werden: möglichst geringe systematische Verzerrung (Bias) und möglichst geringe Schwankung (Varianz).

# Asymptotische Erwartungstreue

---

- \* Eine Schätzfunktion heißt asymptotisch erwartungstreu, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bias}(\hat{\theta}) = 0$$

gelten.

- Abschwächung des Begriffs der Erwartungstreue: Gilt nur noch bei einer unendlich großen Stichprobe.
- Erwartungstreue Schätzer sind auch asymptotisch erwartungstreu.



- Für komplexere Modelle ist oft die Erwartungstreue der Verfahren ein zu restriktives Kriterium. Man fordert deshalb oft nur, dass sich der Schätzer wenigstens für große Stichproben gut verhält. Hierzu gibt es v.a. zwei verwandte aber „etwas“ unterschiedliche Kriterien.
- Ein Schätzer heißt (MSE-)konsistent oder konsistent im quadratischen Mittel, wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{MSE}(T)) = 0.$$

Der MSE von  $\bar{X}$  ist gegeben durch

$$\text{MSE}(\bar{X}) = \text{Var}(\bar{X}) + \text{Bias}^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} + 0 = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0.$$

$\bar{X}$  ist also ein MSE-konsistente Schätzer für den Erwartungswert. Anschaulich bedeutet die Konsistenz, dass sich die Verteilung des Schätzers für wachsenden Stichprobenumfang  $n$  immer stärker beim richtigen Wert „zusammenzieht“. Er trifft also für unendlich große Stichproben praktisch sicher den wahren Wert. (Dies gilt als eine Minimalanforderung an statistische Verfahren.)

# Maximum–Likelihood–Prinzip I

---

Sie wissen als Wirt, dass heute die Lokalparteien ihre Busausflüge unternehmen: Es werden Busse mit je 100 Personen von der jeweiligen Partei organisiert.

- Bus I: 85% Partei A, 15% Partei B
- Bus II: 15% Partei A, 85% Partei B

Bus fährt vor. Anhand Stichprobe ermitteln, welcher Bus vorgefahren ist.

Stichprobe von 10 Personen ergibt 80% Anhänger der Partei A.

- Welche Partei: wohl A, aber B nicht ausgeschlossen bei unglücklicher Auswahl.
- Warum: A ist plausibler, da die Wahrscheinlichkeit, ungefähr den in der Stichprobe beobachteten Wert zu erhalten (bzw. erhalten zu haben) bei Bus I wesentlich größer ist als bei Bus II.



# Maximum-Likelihood-Prinzip II

---

**Aufgabe:** Schätze den Parameter  $\vartheta$  eines parametrischen Modells anhand einer i.i.d. Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  mit der konkreten Realisation  $x_1, \dots, x_n$ .

Idee der Maximum-Likelihood (ML) Schätzung für diskrete Verteilungen:

- Man kann für jedes  $\vartheta$  die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, genau die Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$  zu erhalten:

$$P_{\vartheta}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P_{\vartheta}(X_i = x_i)$$

- Je größer für ein gegebenes  $\vartheta_0$  die Wahrscheinlichkeit ist, die konkrete Stichprobe erhalten zu haben, umso plausibler ist es, dass tatsächlich  $\vartheta_0$  der wahre Wert ist (gute Übereinstimmung zwischen Modell und Daten).



# Maximum-Likelihood-Prinzip: Beispiel

---

i.i.d. Stichprobe vom Umfang  $n = 5$  aus einer  $B(10, \pi)$ -Verteilung:

6 5 3 4 4

Wahrscheinlichkeit der Stichprobe für gegebenes  $\pi$ :

$$\begin{aligned}P(X_1 = 6, \dots, X_5 = 4 | \pi) &= P(X_1 = 6 | \pi) \cdot \dots \cdot P(X_5 = 4 | \pi) \\ &= \binom{10}{6} \pi^6 (1 - \pi)^4 \cdot \dots \cdot \binom{10}{4} \pi^4 (1 - \pi)^6.\end{aligned}$$

„ $P(\dots | \pi)$  Wahrscheinlichkeit, wenn  $\pi$  der wahre Parameter ist“

## Wahrscheinlichkeit für einige Werte von $\pi$

---

$\pi$	$P(X_1 = 6, \dots, X_5 = 4   \pi)$
0.1	0.00000000000001
0.2	0.0000000227200
0.3	0.0000040425220
0.4	0.0003025481000
0.5	0.0002487367000
0.6	0.0000026561150
0.7	0.0000000250490
0.8	0.00000000000055
0.9	0.00000000000000

Man nennt daher  $L(\vartheta) = P_{\vartheta}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ , nun als Funktion von  $\vartheta$  gesehen, die *Likelihood* (deutsch: Plausibilität, Mutmaßlichkeit) von  $\vartheta$  gegeben die Realisation  $x_1, \dots, x_n$ .

# Deduktion und Induktion

- Deduktiv (Wahrscheinlichkeitsrechnung):  $\vartheta$  bekannt,  $x_1, \dots, x_n$  zufällig („unbekannt“).
- Induktiv (Statistik):  $\vartheta$  unbekannt,  $x_1, \dots, x_n$  bekannt.

Deduktiv

**geg:** Parameter bekannt



$P_{\vartheta}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$   
Funktion von  $x_1, \dots, x_n$   
bei festem  $\vartheta$

**ges:** Wskt von Beobachtungen

Induktiv

**ges:** Plausibilität des Parameters



$P_{\vartheta}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$   
Funktion von  $\vartheta$   
bei festem  $x_1, \dots, x_n$

**geg:** Beobachtung bekannt

# Definition Maximum Likelihood

---

Gegeben sei die Realisation  $x_1, \dots, x_n$  einer i.i.d. Stichprobe. Die Funktion in  $\vartheta$

$$L(\vartheta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P_{\vartheta}(X_i = x_i) & \text{falls } X_i \text{ diskret} \\ \prod_{i=1}^n f_{\vartheta}(x_i) & \text{falls } X_i \text{ stetig.} \end{cases}$$

heißt *Likelihood* des Parameters  $\vartheta$  bei der Beobachtung  $x_1, \dots, x_n$ .

Derjenige Wert  $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$ , der  $L(\vartheta)$  maximiert, heißt *Maximum-Likelihood-Schätzwert*; die zugehörige Schätzfunktion  $T(X_1, \dots, X_n)$  *Maximum-Likelihood-Schätzer*.

# Likelihood bei stetige Verteilungen

- In diesem Fall verwendet man die Dichte

$$f_{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\vartheta}(x_i)$$

als Maß für die Plausibilität von  $\vartheta$ .

- Für die praktische Berechnung maximiert man statt der Likelihood typischerweise die Log-Likelihood

$$l(\vartheta) = \ln(L(\vartheta)) = \ln \prod_{i=1}^n P_{\vartheta}(X_i = x_i) = \sum_{i=1}^n \ln P_{\vartheta}(X_i = x_i)$$

bzw.

$$l(\vartheta) = \ln \prod_{i=1}^n f_{\vartheta}(x_i) = \sum_{i=1}^n \ln f_{\vartheta}(x_i).$$

# ML Schätzung für $\pi$ einer Bernoulliverteilung I

---

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Rot/Grün} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilung der  $X_i$ : Binomialverteilung  $B(1, \pi)$  (Bernoulliverteilung)

$$P(X_i = 1) = \pi$$

$$P(X_i = 0) = 1 - \pi$$

$$P(X_i = x_i) = \pi^{x_i} \cdot (1 - \pi)^{1-x_i}, \quad x_i \in \{0; 1\}.$$

Hier ist  $\pi$  der unbekannte Parameter, der allgemein mit  $\vartheta$  bezeichnet wird.



# ML Schätzung für $\pi$ einer Bernoulliverteilung II

---

- Bestimme die Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned}L(\pi) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\&= \prod_{i=1}^n \pi^{x_i} (1 - \pi)^{1-x_i} \\&= \pi^{(\sum_{i=1}^n x_i)} \cdot (1 - \pi)^{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}\end{aligned}$$

# ML Schätzung für $\pi$ einer Bernoulliverteilung III

---

- Berechne die logarithmierte Likelihoodfunktion

$$l(\pi) = \ln(P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln(\pi) + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \cdot \ln(1 - \pi)$$

- Ableiten (nach  $\pi$ ):

$$\frac{\partial}{\partial \pi} l(\pi) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\pi} + \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1 - \pi} \cdot (-1)$$



# ML Schätzung für $\pi$ einer Bernoulliverteilung IV

---

- Bemerkung zur Log-Likelihood

Der Logarithmus ist streng monoton wachsend. Allgemein gilt für streng monoton wachsende Funktionen  $g$ :  $x_0$  Stelle des Maximums von  $L(x) \iff x_0$  auch Stelle des Maximums von  $g(L(x))$ .

# ML Schätzung für $\pi$ einer Bernoulliverteilung V

- Berechnung des ML-Schätzers durch Nullsetzen der abgeleiteten Loglikelihoodfunktion

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \pi} l(\pi) = 0 &\iff \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\pi} = \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1 - \pi} \\ &\iff (1 - \pi) \sum_{i=1}^n x_i = n \cdot \pi - \pi \sum_{i=1}^n x_i \\ &\iff \sum_{i=1}^n x_i = n \cdot \pi\end{aligned}$$

also

$$\hat{\pi} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Also ist  $\bar{X}$  der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\pi$ .

# ML-Schätzung bei Normalverteilung I

- Bestimme die Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned}L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)\end{aligned}$$

- Bestimme die Log-Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned}l(\mu, \sigma^2) &= \ln(L(\mu, \sigma^2)) \\ &= \ln(1) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\end{aligned}$$

# ML-Schätzung bei Normalverteilung II

---

- Ableiten und Nullsetzen der Loglikelihoodfunktion

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$



# ML-Schätzung bei Normalverteilung

---

- Auflösen der beiden Gleichungen nach  $\mu$  und  $\sigma^2$   
Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0 \quad \text{also} \quad \hat{\mu} = \bar{x}.$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir durch Einsetzen von  $\hat{\mu} = \bar{x}$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = n\sigma^2$$

also

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- Der ML-Schätzer  $\hat{\mu} = \bar{X}$  für  $\mu$  stimmt mit dem üblichen Schätzer für den Erwartungswert überein.
- Der ML-Schätzer  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  für  $\sigma^2$  ist verzerrt, d.h. nicht erwartungstreu.

# Einige allgemeine Eigenschaften von ML-Schätzern

---

- ML-Schätzer  $\hat{\theta}$  sind im Allgemeinen nicht erwartungstreu.
- ML-Schätzer  $\hat{\theta}$  sind asymptotisch erwartungstreu.
- ML-Schätzer  $\hat{\theta}$  sind konsistent.



# Zusammenfassung und Ausblick

---

- Schätztheorie ist ein zentrales Werkzeug statistischer Inferenz
- Stochastische Aussagen über Schätzfehler möglich
- Bias und MSE sind zentrale Kenngrößen
- Likelihood wichtige allgemeine Basis
- Intervallschätzungen werde im nächsten Kapitel besprochen

