# Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017

# Hypothese

„Behauptung einer Tatsache, deren Überprüfung noch aussteht“ (Leutner in: Endruweit, Trommsdorff: Wörterbuch der Soziologie, 1989).

**Statistischer Test:** Überprüfung von Hypothesen anhand einer Stichprobe

**Idealtypische Vorgehensweise**
Wissenschaftlicher Fortschritt durch Falsifikation von Hypothesen

# Statistische Testtheorie

Schließe von Stichprobe oder Experiment auf Grundgesamtheit bzw. Allg. Gesetz

**Vorgehen:**

- Inhaltliche Hypothese aufstellen
- Operationalisierung
- Inhaltliche Hypothese in statistische Hypothese „Übersetzen“
- Statistischer Test

# Bemerkungen

- **Statistische Tests:**
  Die am häufigsten verwendete Art statistischer Inferenz
- **Statistische Signifikanz:**
  Zentrales Argument bei vielen empirischen Arbeiten
- **Voraussetzung für Testverfahren:**
  Zufallsstichprobe oder Experiment

Ist ein beobachtetes Phänomen in Stichproben ein **reines Zufallsprodukt** oder **mit großer Sicherheit** auf einen **realen Effekt** zurückzuführen?
$\longrightarrow$ Dazu notwendig:
**Formale Entscheidungsregel** = Statistischer Test

# Beispiel: Münzdrehen (2€)

Zeitungsberichte: 2€ Münzen nicht „fair“


# Münzhypothese

- Vermutung:
  2€- Münze nicht fair
- Überprüfung: 10-Mal die Münze werfen, Anzahl ,,Zahl" notieren

Mögliche Ergebnisse des Experiments

- 5-Mal "Zahl"
  $\longrightarrow$ deutet nicht auf eine unfaire Münze hin
- 10-Mal "Zahl"
  $\longrightarrow$ verdächtig, die Münze ist vermutlich nicht fair
- 0-Mal "Zahl"
  $\longrightarrow$ verdächtig, die Münze ist vermutlich nicht fair
- 8-Mal "Zahl"
  $\longrightarrow$ ?? mehr Zahlwürfe als erwartet. Zufall? Oder Münze nicht fair?

# Münzhypothese

- Vermutung:
  2€- Münze nicht fair
- Statistische Formulierung:
  $X$ Bernoulli-Variable

$$X = \begin{cases} 1 & "Zahl" \\ 0 & "Adler" \end{cases}$$

- Wahrscheinlichkeit für Zahl

$$\pi = P(X = 1)$$

- ,,Die Münze ist nicht fair'' heißt

$$\pi \neq 0.5$$

# Überprüfung der Münzhypothese

- Experiment: Wir werfen $n = 10$-Mal die Münze

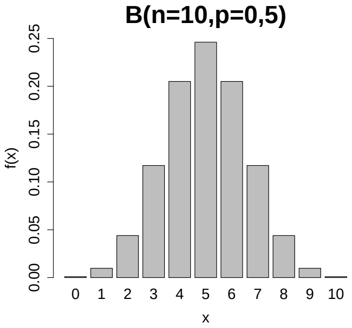
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \sim \quad B(n = 10, \pi)$$

- Welche Ergebnisse sind wahrscheinlich, falls die Münze fair ist?
- **Falls die Münze fair ist**, so ist die Anzahl ,,Zahl" binomialverteilt mit $p = 0.5$.

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \quad \sim \quad B(n = 10, \pi = 0.5)$$

- **Falls die Münze fair ist**, so sollte $\sum_{i=1}^{10} X_i$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % nicht weit entfernt vom Erwartungswert 5 liegen.

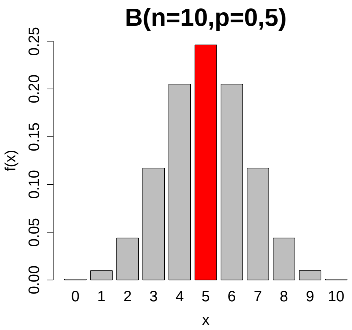
# Binomialverteilung




| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.001 | 0.010 | 0.044 | 0.117 | 0.205 | 0.246 | 0.205 | 0.117 | 0.044 | 0.010 | 0.001 |

$$\sum =$$

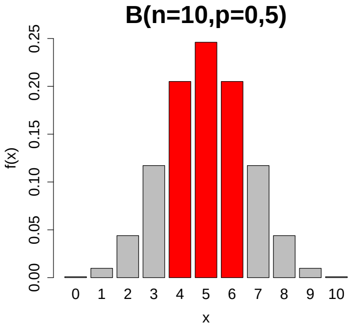
# Binomialverteilung




| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.001 | 0.010 | 0.044 | 0.117 | 0.205 | 0.246<br>0.246 | 0.205 | 0.117 | 0.044 | 0.010 | 0.001 |

$$\sum = 0.246$$

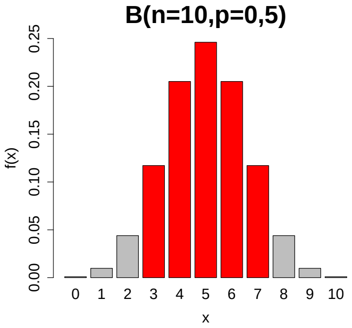
# Binomialverteilung




| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.001 | 0.010 | 0.044 | 0.117 | 0.205<br>0.205 | 0.246<br>0.246 | 0.205<br>0.205 | 0.117 | 0.044 | 0.010 | 0.001 |

$$\sum = 0.656$$

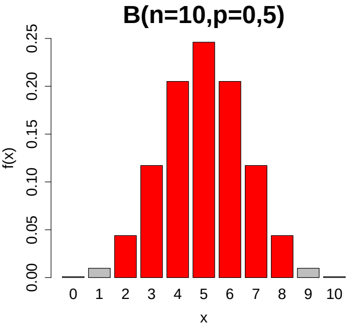
# Binomialverteilung




| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.001 | 0.010 | 0.044 | 0.117<br>0.117 | 0.205<br>0.205 | 0.246<br>0.246 | 0.205<br>0.205 | 0.117<br>0.117 | 0.044 | 0.010 | 0.001 |

$$\sum = 0.890$$

# Binomialverteilung




| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.001 | 0.010 | 0.044 | 0.117 | 0.205 | 0.246 | 0.205 | 0.117 | 0.044 | 0.010 | 0.001 |
| | | | 0.044 | 0.117 | 0.205 | 0.246 | 0.205 | 0.117 | 0.044 | | |

$$\sum = 0.978$$

# Münzhypothese

- Falls die Münze fair ist, so liegt die Anzahl "Zahl" bei $n = 10$ Würfen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% im Bereich

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

- Falls die Anzahl "Zahl" im Bereich $\{0, 1, 9, 10\}$ liegt, kann dies zwei Ursachen haben.
  1. Ein sehr unwahrscheinliches Ereignis ist eingetreten.
  2. Unsere Annahme, dass die Münze fair ist, stimmt nicht.

**Entscheidungsregel, statistischer Test**

Falls die Anzahl "Zahl" im Bereich $\{0, 1, 9, 10\}$ liegt, verwerfen wir die Vermutung, dass die Münze fair ist und gehen davon aus, dass die Münze nicht fair ist.

# Statistischer Test: Hypothese

## Statistischer Test

Untersuchung, ob man eine Hypothese über die Grundgesamtheit mit Hilfe einer Stichprobe widerlegen kann.

- Nullhypothese $H_0 =$ Hypothese, die widerlegt werden soll.
  Beispiel: Die Münze ist fair

$$H_0 \quad : \quad \pi = 0.5$$

- Gegenhypothese $H_1 =$ Alternative zur Nullhypothese.
  Beispiel: Die Münze ist nicht fair

$$H_1 \quad : \quad \pi \neq 0.5$$

# Statistischer Test: Prüfgröße, Teststatistik

- Eine Prüfgröße (Teststatistik) $T$ ist eine zufällige Größe,
  1. anhand der wir entscheiden, ob die Nullhypothese $H_0$ plausibel ist.
  2. deren Verteilung wir kennen, falls die Nullhypothese $H_0$ zutrifft.
- Beispiel: Anzahl "Zahl" bei $n = 10$ Würfen. Unter $H_0$ gilt:

$$T = \sum_{i=1}^{10} X_i \quad \sim B(n = 10, \pi = \mathbf{0.5})$$

# Statistischer Test: Annahme- und Ablehnbereich

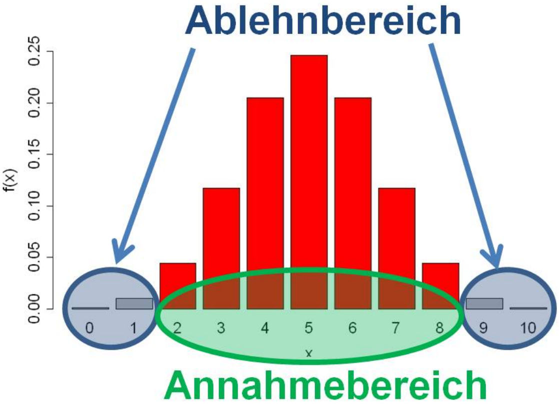
- Der Annahmebereich des Tests ist der Bereich, in dem die Prüfgröße $T$ mit einer hohen Wahrscheinlichkeit (mindestens $1 - \alpha$) liegt.
  Beispiel: $\alpha = 0.05$ und

$$\text{Annahmebereich} \quad = \quad \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

- $\alpha$ heißt das Signifikanzniveau des Tests.
- Der Ablehnbereich (kritische Bereich) ist der Bereich, in dem die Prüfgröße $T$ mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit (höchstens $\alpha$) liegt.
  Beispiel: $\alpha = 0.05$ und

$$\text{Ablehnbereich} \quad = \quad \{0, 1, 9, 10\}$$

# Beispiel Annahme- und Ablehnbereich



# Statistischer Test: Experiment und Entscheidung

Wir ziehen eine Stichprobe und berechnen den Wert der Teststatistik $T$.

**1. Fall:** Der Wert der Teststatistik liegt im Annahmebereich.
$\longrightarrow$ Wir behalten die Nullhypothese $H_0$ bei.

**2. Fall:** Der Wert der Teststatistik liegt im Ablehnbereich.
$\longrightarrow$ Wir lehnen die Nullhypothese $H_0$ zugunsten der Gegenhypothese $H_1$ ab.

# Festlegung des Signifikanzniveaus $\alpha$

Beim Testen sind folgende Entscheidungen möglich:

$H_0$: ablehnen oder $H_0$: beibehalten

Damit sind zwei verschiedene Arten von Fehlern möglich:

| Wahrheit Aktion | $H_0$ beibehalten | $H_0$ ablehnen |
|---|---|---|
| $H_0$ wahr | $\surd$ | Fehler 1.Art |
| $H_0$ falsch | Fehler 2. Art | $\surd$ |

Man kann nicht beide Fehlerwahrscheinlichkeiten gleichzeitig kontrollieren! (Tradeoff!)
$\Rightarrow$ asymmetrische Vorgehensweise:

Der Fehler 1. Art wird kontrolliert durch die Angabe einer Oberschranke $\alpha$ („Signifikanzniveau“)

# Signifikanzniveau

Übliche Werte für den Fehler erster Art sind:

$$\alpha = 0.1, \quad \alpha = 0.05, \quad \alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.001$$

- Implizit wird also der Fehler 1. Art als schwerwiegender betrachtet.
- „konservative Perspektive“: Nullhypothese erst ablehnen, wenn wirklich nicht mehr mit den Daten verträglich.
- z.B. in der Medizin: $H_0$: keine Wirkung.
  $\Rightarrow$ Nur wenn die Wirkung des Medikaments überzeugend ist, soll es zugelassen werden.

# Fehler 1. Art ($\alpha$-Fehler):

- Die Nullhypothese wird abgelehnt, obwohl sie in Wirklichkeit richtig ist. Z.B.: Man behauptet, es bestünde ein Zusammenhang, obwohl in Wirklichkeit kein Zusammenhang besteht.

- Der Fehler 1. Art soll klein sein (üblich sind 5% oder 10%). Allerdings kann man nicht fordern, dass der Fehler 1. Art bei 0% liegen soll, sonst würde man die Nullhypothese nie ablehnen können.

  $\Rightarrow$ Fehler 2. Art

# Fehler 2. Art ($\beta$-Fehler):

- Die Nullhypothese wird beibehalten, obwohl sie in Wirklichkeit falsch ist.

- Ein guter statistischer Test garantiert bei einem vergegebenen niedrigen Signifikanzniveau (als Schranke für den Fehler 1. Art) auch einen möglichst geringen Fehler 2. Art.

# Folgerungen

- Die Nullhypothese wird höchstens mit Wahrscheinlichkeit $\alpha$ fälschlicherweise verworfen.
- Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art können wir nicht kontrollieren.

$\downarrow$

Ungleichbehandlung beider Fehlerarten
$\rightarrow$ Grund für Formulierung eigentlicher Forschungsfrage
als statistische Alternative:
Entscheidung für $H_1$ durch $\alpha$ statistisch abgesichert!

# Veranschaulichung

- Ein Angeklagter steht vor Gericht.
- Hypothesen
  $H_0$: „Angeklagter ist unschuldig“
  und
  $H_1$: „Angeklagter ist schuldig“
- Urteil: schuldig/nicht schuldig
- $H_0$ und $H_1$ sind so formuliert, da das Gericht die Schuld des Angeklagten beweisen muss, und nicht der Angeklagte seine Unschuld.

$$\downarrow$$

- Fehler 1. Art: Unschuldiger wird verurteilt
- Fehler 2. Art: Schuldiger wird nicht verurteilt

# p-Wert

**p-Wert**

Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Testgröße

- den beobachteten Wert oder einen noch extremeren Wert („weiter weg von $H_0$") annimmt
- unter der Bedingung, dass $H_0$ wahr ist.

**Bemerkungen**

1. Für die Berechnung der $p$-Werte benötigt man eine Statistik-Software oder Tabellen.
2. Viele Statistik-Programme geben als Ergebnis eines statistischen Tests nur den $p$-Wert aus.

# p-Wert Bestimmung: Zweiseitiger Test

- $P_{H_0}(10 \text{ Zahl}) + P_{H_0}(0 \text{ Zahl}) = 0.002$
  10 Zahl $\Rightarrow$ p–Wert 0.002
- $P_{H_0}(9 \text{ Zahl}) = 0.01$
  $\longrightarrow P_{H_0}(\text{mindestens 9 Zahl oder höchstens 1 Zahl })$
  $= 0.001 + 0.01 + 0.01 + 0.001 = 0.022$
  9 Zahl $\Rightarrow$ p–Wert $= 0.022$
- $P_{H_0}(8 \text{ Zahl}) = 0.044$
  $\longrightarrow P_{H_0}(\text{mindestens 8 Zahl oder höchstens 2 Zahl})$
  $= 2 * (0.001 + 0.01 + 0.044) = 0.110$
  8 Zahl $\Rightarrow$ p–Wert $= 0.110$
- $P_{H_0}(7 \text{ Zahl}) = 0.117$
  $\longrightarrow P_{H_0}(\text{mehr als 7 Zahl oder höchstens 3 Zahl})$
  $= 2 * (0.001 + 0.01 + 0.044 + 0.117) = 0.344$
  7 Zahl $\Rightarrow$ p–Wert $=$0.344

# Testentscheidung durch p-Wert

**p-Wert und Signifikanzniveau**

Die Nullhypothese wird genau dann abgelehnt, wenn der p-Wert kleiner oder gleich $\alpha$ ist.

Das ermöglicht ein direktes Ablesen der Testentscheidung aus entsprechenden Computerprogrammen. Daher wird der p-Wert meist zu den Test angegeben.
Illustration mit R
Je kleiner der p–Wert desto weniger passen die Daten zur Nullhypothese

# p-Wert: Interpretation

- Wahrscheinlichkeit betrifft das Auftreten der Daten und nicht die Wahrscheinlichkeit von $H_0$
- p-Wert ist **kein Maß** für die Stärke des Effekts. Daher sollten Begriffe wie "hochsignifikant" eher vermieden werden.
- Angabe des p-Wertes immer mit Schätzung des Effekts und Konfidenzintervall
- Bei kleinen p-Werten sollte nur $p < 0.001$ o.ä. angegeben werden.

# Testtheorie

## Motivation

Die Prüfung einer statistischen Hypothese $H_0$ erfolgt mit statistischen Tests.

Ausgangspunkt ist die *Beobachtung* einer Zufallsvariablen in einer *zufälligen Stichprobe* oder einem *Experiment* .

Mittels der daraus gewonnenen *Schätzungen* der unbekannten Parameter will man zu einer *Aussage* über die Glaubwürdigkeit der Hypothese $H_0$ gelangen.

# Testtheorie

### Definition Hypothesenraum

Der statistische Test stellt eine Methode dar, Verteilungsannahmen über eine Zufallsvariable $X$ anhand einer konkreten Stichprobe zu überprüfen.

Die Menge aller für die Zufallsvariable $X$ in Frage kommenden Verteilungen wird als *Hypothesenraum* $\Omega$ bezeichnet. Diese Menge ist *vor* der Durchführung eines Test festzulegen.

### Definition parametrisches Testproblem

Betrachtet man einen Hypothesenraum $\Omega$, der nur Verteilungen *einer* Familie (z.B. Normalverteilung) enthält, so ist die Festlegung von $\Omega$ äquivalent zur Festlegung des Parameterraums $\Theta$, der alle möglichen Werte eines Verteilungsparameters $\theta$ enthält. In diesem Fall spricht man von einem *parametrischen Testproblem*.

# Testtheorie

## Definition Nullhypothese und Alternative

Bei einem parametrischen Testproblem wird der Hypothesenraum (Parameterraum) in zwei Teilmengen aufgeteilt:

**Nullhypothese** die zu testende Hypothese, die durch den Test widerlegt werden soll: $H_0 = \{\theta | \theta \in \Theta_0\}$

**Alternative** diejenige Hypothese, die durch den Test gezeigt werden soll: $H_1 = \{\theta | \theta \in \Theta_1\}$

Dabei gilt stets: $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

## Definition Signifikanztest

Ein Test heißt *Signifikanztest*, wenn die Nullhypothese direkt an die Alternative „grenzt", d.h., wenn die minimale Distanz zwischen beiden Hypothesen gleich Null ist (z.B. $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$).

# Testtheorie

### Definition Testgröße

Die Funktion $T(\mathbf{X}) = T(X_1, ..., X_n)$ der Stichprobenvariblen $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ heißt *Testgröße* oder *Prüfgröße*.

Für die konkrete Stichprobe $(x_1, ..., x_n)$ ergibt sich $t = T(x_1, ..., x_n)$ als Realisation der Zufallsgröße $T(\mathbf{X})$.

### Definition kritischer Bereich und Annahmebereich

Der Wertebereich der Zufallsgröße $T(X_1, ..., X_n)$ wird in zwei Teilbereiche zerlegt:

**kritischer Bereich** $K$ $H_0$ wird abgelehnt, falls

$$t = T(x_1, ..., x_n) \in K$$

**Annahmebereich** $\bar{K}$ $H_0$ wird beibehalten, falls

$$t = T(x_1, ..., x_n) \notin K$$

# Testtheorie

## Definition Fehler 1. und 2. Art

Bei der Durchführung eines statistischen Tests können folgende vier Situationen auftreten:

| | $H_0$ ist richtig | $H_0$ ist falsch |
|---|---|---|
| $H_0$ wird beibehalten | richtige Entscheidung | *Fehler 2. Art* |
| $H_0$ wird abgelehnt | *Fehler 1. Art* | richtige Entscheidung |

## Definition Signifikanzniveau und Niveau-$\alpha$-Test

Bei der Konstruktion eines Tests gibt man sich für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art eine Schranke $\alpha$ vor (z.B. $\alpha = 0,05$), die nicht überschritten werden darf.
Diese Schranke bezeichnet man als *Signifikanzniveau* des Tests.
Der zugehörige Test heißt dann *Signifikanztest zum Niveau* $\alpha$ oder kurz *Niveau-$\alpha$-Test*.

# Testtheorie

## ein- und zweiseitige Tests

| Fall | Null-hypothese | Alternativ-hypothese | Testproblem |
|---|---|---|---|
| (a) | $\theta = \theta_0$ | $\theta \neq \theta_0$ | zweiseitig |
| (b) | $\theta \geq \theta_0$ | $\theta < \theta_0$ | einseitig |
| (c) | $\theta \leq \theta_0$ | $\theta > \theta_0$ | einseitig |

# Testtheorie

## allgemeines Vorgehen bei Tests

1. Verteilungsannahme über die Zufallsvariable $X$
2. Formulierung von $H_0$ und $H_1$
3. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$
4. Konstruktion bzw. Wahl einer geeigneten Testgröße $T(X) = T(X_1, ..., X_n)$ als Funktion der Stichprobenvariablen $X$
5. Wahl eines kritischen Bereichs $K$ mit $P_\theta(T(X) \in K) \leq \alpha$ für alle $\theta \in \Theta_0$
6. Berechnung der Realisierung $t = T(X_1, ..., X_n)$ der Testgröße anhand der konkreten Stichprobe $(x_1, ..., x_n)$
7. Entscheidungsregel:
    - $t \in K$ : $H_0$ ablehnen, damit $H_1$ signifikant
    - $t \notin K$ : $H_0$ beibehalten

# Testtheorie

### Testentscheidung mit $p$-Werten

Beim Einsatz von Statistiksoftware zum Prüfen von Hypothesen werden unsere üblichen Schritte – insbesondere der kritische Wert – nicht angezeigt. Statt dessen wird der konkrete Wert der Teststatistik und der zugehörige **p-value** oder die sog. **Signifikanz** ausgegeben.
Die Testentscheidung lautet dann: $H_0$ ablehnen, falls der $p$-value kleiner oder gleich dem vorgegebenem Signifikanzniveau $\alpha$ ist, ansonsten $H_0$ nicht ablehnen.

# Zweiseitiger approximativer Test auf den Anteilswert

- $X$ Bernoulli-Variable mit $\pi = P(X = 1)$.
- Zweiseitige Hypothese über den Anteilswert $p$

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad \pi = \pi_0 \\
H_1 &: \quad \pi \neq \pi_0
\end{aligned}
$$

- Testgröße: Anteil in der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$

$$
\hat{\pi} \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i
$$

- Stichprobenumfang $n$ ist genügend groß

# Zweiseitiger approximativer Test auf den Anteilswert

Hypothesen: $H_0 : \pi = \pi_0$ versus $H_1 : \pi \neq \pi_0$

**Testentscheidung zum Signifikanzniveau $\alpha$**

Annahmebereich

$$\pi_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

$H_0$ wird abgelehnt, falls

$$\hat{\pi} < \pi_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

oder

$$\hat{\pi} > \pi_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

# Beispiel: Münzwurf bei Stern TV 2002

- Nullhypothese: $\pi = \pi_0 = 0.5$ („Münze ist fair.")
- Signifikanzniveau: $\alpha = 0.01$
- $n = 800$ Münzwürfe
  $\rightarrow$ Normalverteilung
- Annahmebereich

$$
\begin{aligned}
\pi_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} &= 0.5 \pm z_{1-\frac{0.01}{2}} \cdot \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{800}} \\
&= 0.5 \pm 0.054
\end{aligned}
$$

- $H_0$ wird beibehalten, falls: $\hat{\pi} \in [0.454; 0.546]$

Wert bei Stern TV (2002) : 501/800

# Dualität Test und Konfidenzintervall

- Annahmebereich: Wir behalten $H_0$ bei, falls die Testgröße $\hat{\pi}$ in der Nähe von $\pi_0$ liegt:
- Äquivalente Formulierung über ein Konfidenzintervall: Wir behalten $H_0$ bei, falls $\pi_0$ in der Nähe der Testgröße liegt
- Wir behalten $H_0$ bei, falls $\pi_0$ im Konfidenzintervall für den Anteil liegt
- Dabei hängen das Konfindenzniveau $\gamma$ und das Signifikanzniveau $\alpha$ wie folgt zusammen:
  $1 - \alpha = \gamma$
- Dies gilt sehr allgemein für zweiseitige Test und Konfidenzintervalle
- Dies Prinzip kann zur Konstruktion von Konfidenzintervallen verwendet werden

# Einseitiger Test auf den Anteilswert

- $X$ Bernoulli-Variable mit $\pi = P(X = 1)$.
- Einseitige Hypothese über den Anteilswert $\pi$

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \pi \leq \pi_0 \\ H_1 &: \quad \pi > \pi_0 \end{aligned}$$

- Testgröße: Anteil in der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$

$$\hat{\pi} \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Stichprobenumfang $n$ ist genügend groß
  (Faustregel: $n\pi_0(1 - \pi_0) > 9$)

# Einseitiger Test auf den Anteilswert

Hypothesen: $H_0 : \pi \leq \pi_0$ vs. $H_1 : \pi > \pi_0$

**Testentscheidung zum Signifikanzniveau $\alpha$**

Annahmebereich

$$\hat{\pi} \quad \leq \quad \pi_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

$H_0$ wird abgelehnt, falls

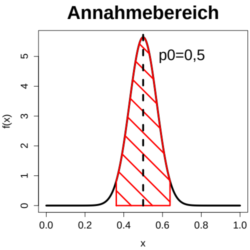
$$\hat{\pi} \quad > \quad \pi_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

$z_{1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung.

# Vergleich einseitige Tests und zweiseitiger Test

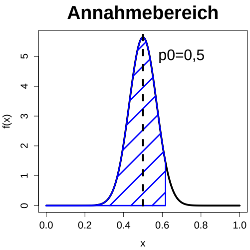
Test auf Anteil mit einer Stichprobe der Größe $n = 50$ und Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

$H_0 : \pi = 0.5$
$H_1 : \pi \neq 0.5$



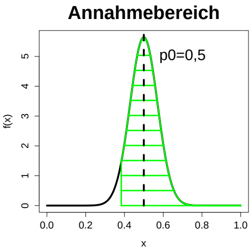

$[0.36; 0.64]$

$H_0 : \pi \leq 0.5$
$H_1 : \pi > 0.5$




$[0; 0.62]$

$H_0 : \pi \geq 0.5$
$H_1 : \pi < 0.5$




$[0.38; 1]$

# p-Wert: Ein- und zweiseitiger Test

In vielen Fällen halbiert sich der p-Wert bei einseitiger Fragestellung.

**Beispiel:** Binomialtest 10 Experimente $T$ Anzahl Treffer.
Ergebnis: $T = 9$

- zweiseitiger Test: $H_0 : \pi = 0.5$ gegen $H_1 : \pi \neq 0.5$.

  Extrem oder gleich extreme Werte von T: 9,10,1,0

  p-Wert =
  $P_{H_0}(T \in \{9, 10, 0, 1\}) = 0.01 + 0.001 + 0.01 + 0.001 = 0.022$

- einseitiger Test: $H_0 : \pi \leq 0.5$ gegen $H_1 : \pi > 0.5$

  Extrem oder gleich extreme Werte von T: 9, 10

  p-Wert $= P_{H_0}(T \in \{9, 10\}) = 0.11$

# Test auf den Erwartungswert

- Wir interessieren uns für den Erwartungswert $\mu$ einer metrischen Zufallsgröße.
  Beispiele: Alter, Einkommen, Körpergröße, Scorewert ...
- Wir können einseitige oder zweiseitige Hypothesen formulieren.
- Beispiele
  - "Vor 10 Jahren betrug die Durchschnittsgröße von Studienanfängern und -anfängerinnen 167 cm. Heute sind sie im Schnitt größer als 167 cm."
  - Die Differenz zwischen Gewicht vor und nach einer Diät ist 0.

# Zweiseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

- $X$ Zufallsgröße mit Erwartungwert $\mu$.
- Zweiseitige Hypothese über $\mu$:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \quad \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

- Testgröße: Mittelwert in der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$:

$$\overline{X} \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Stichprobenumfang $n$ ist genügend groß
  (Faustregel $n > 30$)

# Zweiseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

Hypothesen: $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

**Testentscheidung zum Signifikanzniveau $\alpha$**

Annahmebereich

$$\mu_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

mit

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$H_0$ wird abgelehnt, falls

$$\overline{X} < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2}{n}} \quad \text{oder} \quad \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ist das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Standardnormalverteilung.

# Zweiseitiger Gauss-Test: p–Wert

Der p-Wert ergibt sich zu :

$$2 \cdot \left[1 - \Phi\left(|\overline{X} - \mu_0| / \sqrt{\frac{S^2}{n}}\right)\right]$$

$\Phi$ ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung

$$(\overline{X} - \mu_0) / \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

wird als t-Wert (oder z-Wert) bezeichnet.

# Beispiel:
# Verändert sich der Blutdruck nach einer Intervention

Beispiel zweiseitiger Test

- Nullhypothese: Die Blutdruckdifferenz ist 0.

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad \mu = 0 \\
H_1 &: \quad \mu \neq 0
\end{aligned}
$$

- Testgröße: Durchschnittlicher Bluddruck
- Faustregel $n = 62 > 30$ ist erfüllt
  $\longrightarrow$ zweiseitiger Gauß-Test

# Einseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

- $X$ Zufallsgröße mit Erwartungwert $\mu$.
- Einseitige Hypothese über $\mu$:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu \leq \mu_0 \\ H_1 &: \quad \mu > \mu_0 \end{aligned}$$

- Testgröße: Mittelwert in der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$:

$$\overline{X} \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Stichprobenumfang $n$ ist genügend groß
(Faustregel $n > 30$)

# Einseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

Hypothesen: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

**Testentscheidung zum Signifikanzniveau $\alpha$**

Annahmebereich

$$\overline{X} \quad \leq \quad \mu_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$H_0$ wird abgelehnt, falls

$$\overline{X} \quad > \quad \mu_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$z_{1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung.

# Zusammenfassung

- Signifikanztest weiteres zentrales Instrument der statistischen Inferenz
- Konstruktion über Nullhypothese (i.d.R. Gegenteil der Forschungshypothese)
- Statistische Signifikanz entspricht Falsifizierung der Nullhypothese
- Enger Zusammenhang mit Konfidenzintervallen