

# Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017



- 1 Einführung
- 2 Wahrscheinlichkeit: Definition und Interpretation
- 3 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
- 4 Zufallsgrößen
- 5 Spezielle Zufallsgrößen
- 6 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 7 Genzwertsätze
- 8 Statistische Inferenz: Punktschätzer
- 9 Statistische Inferenz: Konfidenzintervalle
- 10 Statistische Inferenz: Statistische Tests
- 11 Spezielle statistische Tests

# Konstruktion von statistischen Tests

---

- 1 Forschungshypothese
- 2 Operationalisierung über die zu beobachtende Zufallsvariable  $X$  und deren Parameter
- 3 Formulierung von  $H_0$  typischerweise als Gegenteil der Forschungshypothese und  $H_1$
- 4 Konstruktion bzw. Wahl einer geeigneten Testgröße  $T(X) = T(X_1, \dots, X_n)$  als Funktion der erhobenen Daten. Die Testgröße beinhaltet die Information der Daten bezüglich  $H_0$ .
- 5 Aus der Verteilung von  $T(X)$  unter der Nullhypothese erhält man Ablehnbereich bzw.  $p$ -Wert
- 6 Entscheidungsregel:  $H_0$  ablehnen, falls Testgröße im Ablehnbereich bzw.  $p$  – Wert  $< \alpha$



# Typen von Tests

---

- Ein-Stichproben-Fall vs. Zwei- oder Mehr-Stichproben-Fall
- Parametrisch vs. Non-Parametrisch
- Lageparameter, Verteilungen, Andere Parameter



# Test auf den Erwartungswert

---

- Wir interessieren uns für den Erwartungswert  $\mu$  einer metrischen Zufallsgröße.  
Beispiele: Alter, Einkommen, Körpergröße, Scorewert ...
- Wir können einseitige oder zweiseitige Hypothesen formulieren.
- Beispiele
  - Der Mittelwert der Länge eines Teils in der Produktion liegt bei 12.50 cm
  - Der Blutdruck einer Person wird durch eine Intervention niedriger



# Zweiseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

Voraussetzung: Stichprobenumfang  $n$  genügend groß (Faustregel  $n > 30$ )

- 2  $X$  Zufallsgröße mit Erwartungswert  $\mu$ .
- 3 Hypothese über  $\mu$ :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- 4 Testgröße: Normierter Mittelwert in der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$ .

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Bezeichnung für T: t-Wert oder z-Wert

# Zweiseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

- 5 (Approximative) Verteilung von  $T$  unter  $H_0$

$$T \sim N(0, 1)$$

- 6 Testentscheidung :

$$p\text{-Wert} = 2 \cdot [1 - \Phi(|T|)] = 2 \cdot \left[ 1 - \Phi \left( |\bar{X} - \mu_0| / \sqrt{\frac{S^2}{n}} \right) \right]$$

$\Phi$  ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung  
Ablehnung für

$$|T| > z_{1-\alpha/2}$$

$z_{1-\alpha/2}$  ist das  $(1-\alpha/2)$  - Quantil der Standardnormalverteilung

# Einseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

Voraussetzung: Stichprobenumfang  $n$  genügend groß (Faustregel  $n > 30$ )

- 2  $X$  Zufallsgröße mit Erwartungswert  $\mu$ .
- 3 Hypothese über  $\mu$ :

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

- 4 Testgröße: Normierter Mittelwert in der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$ .

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Bezeichnung für T: t-Wert oder z-Wert



# Einseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

- 5 (Approximative) Verteilung von  $T$  unter  $H_0$

$$T \sim N(0, 1)$$

- 6 Testentscheidung :

$$p\text{-Wert} = [1 - \Phi(T)] = \left[ 1 - \Phi \left( (\bar{X} - \mu_0) / \sqrt{\frac{S^2}{n}} \right) \right]$$

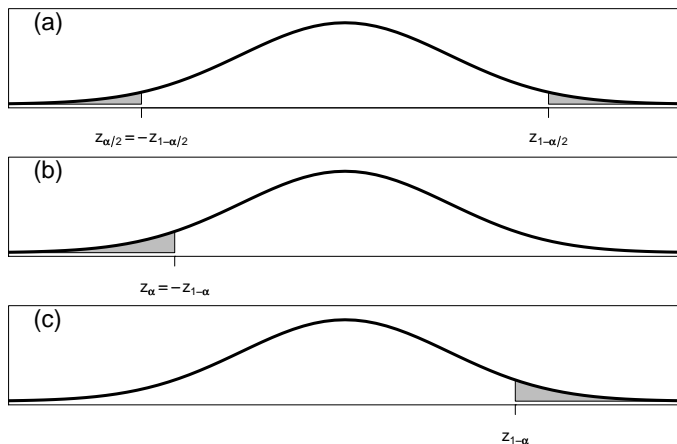
$\Phi$  ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung  
Ablehnung für

$$|T| > z_{1-\alpha}$$

$z_{1-\alpha}$  ist das  $(1-\alpha)$  - Quantil der Standardnormalverteilung

# Ablehnbereich einfacher Gauss-Test

Graphisch dargestellt liegt der kritische Bereich für die unterschiedlichen Fälle an den markierten Enden:



Wird bei kleineren Stichproben verwendet.  
Voraussetzung:  $X$  annähernd normalverteilt

- 1  $X$  Zufallsgröße mit Erwartungswert  $\mu$ .
- 2 Hypothese über  $\mu$ :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- 3 Testgröße: Normierter Mittelwert in der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$ .

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Bezeichnung für  $T$ : t-Wert oder z-Wert

- 4 Verteilung von  $T$  unter  $H_0$

$$T \sim t^{n-1}$$

t-Verteilung mit  $n-1$  Freiheitsgraden

- 5 Testentscheidung :

$$p - \text{Wert} = 2 \cdot [1 - F_{t;n-1}(|T|)]$$

$F_{t;n-1}$  ist die Verteilungsfunktion der t-Verteilung mit  $n-1$  Freiheitsgraden  
Ablehnung für

$$|T| > t_{1-\alpha/2}^{n-1}$$

$t_{1-\alpha/2}^{n-1}$  ist das  $(1-\alpha/2)$  - Quantil der  $t^{n-1}$  - Verteilung

# Veränderung des Blutdruck nach einer Intervention

---

- Nullhypothese: Die Blutdruckdifferenz ist 0.

$$H_0 : \mu = 0$$

$$H_1 : \mu \neq 0$$

- Testgröße: Durchschnittliche Blutdruckdifferenz
- $n = 22$  → zweiseitiger **t-Test**



# Ergebnisse mit R

---

data: bdd

$t = -1.8237$ ,  $df = 21$ ,  $p\text{-value} = 0.08246$

Alternative hypothesis: true mean is not equal to 0

95 percent confidence interval:

-5.9034075 0.3870439

sample estimates:

mean of  $x$

-2.758182

## Non-Parametrischer Test zur Lage einer Verteilung

- 2 Betrachtet wird der Median einer Verteilung von beliebiger Struktur
- 3  $H_0 : x_{med} = \delta_0$   
 $H_1 : x_{med} \neq \delta$
- 4  $T =$  Anzahl der Werte  $< \delta_0$
- 5  $T \sim B(n; 0.5)$
- 6 Testentscheidung

$$p - \text{Wert} = \min(2 \cdot (1 - F_{B(n;0.5)}(T - 1)); 2 \cdot (F_{B(n;0.5)}(T)))$$

$F_{B(n;0.5)}$  : Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

## Motivation

Wir wollen prüfen ob eine Zufallsgröße einer bestimmten Verteilung genügt.

Beispiel: Der Würfel ist fair (alle Zahlen habe die Wahrscheinlichkeit  $1/6$ )

Die Testgröße wird so konstruiert, dass sie die Abweichungen der unter  $H_0$  erwarteten von den tatsächlich beobachteten absoluten Häufigkeiten misst.

Der Test wird zunächst für kategoriale Größen definiert. Bei stetigem Größen kann der Test angewendet werden, wenn die Stichprobe  $\mathbf{X}$  in  $k$  (oft willkürlich gewählten) Klassen eingeteilt wird..



- 1 Die diskrete Zufallsgröße  $X$  mit möglichen Werten  $1, \dots, k$  hat eine bestimmte Verteilung  $F_0(x)$
- 2  $H_0 : P(X = i) = \pi_i$   
 $H_1 : P(X = i) \neq \pi_i$  für mindestens ein  $i$
- 3 Konstruktion der Testgröße

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i}$$

wobei

- $N_i$  die absolute Häufigkeit der Stichprobe  $\mathbf{X}$  für die  $i$ -te Klasse angibt
- $\pi_i$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  in die Klasse  $i$  fällt
- $n$  die Größe der Stichprobe beinhaltet.

## 4 Verteilung der Testgröße

$$T_{H_0} \sim \chi_{k-1}^2$$

Die  $\chi^2$ -Verteilung gilt nur asymptotisch und ist zumeist hinreichend genau, wenn höchstens  $1/5$  der erwarteten Klassenbesetzungen  $n\pi_i$  kleiner als 5 und alle  $n\pi_i$  größer als 1 sind.

## 5 Testentscheidung

Kritischer Bereich:  $K = (c_{k-1; 1-\alpha}; \infty)$

# Approximativer Test auf Erwartungswert-Differenz bei unabhängigen Stichproben

---

## Voraussetzungen:

- $X$  und  $Y$  sind zwei Größen mit Erwartungswerten  $\mu_X$  und  $\mu_Y$
- $X_1, \dots, X_m$  und  $Y_1, \dots, Y_n$  **unabhängige** Stichproben
- Testgröße: standardisierte Differenz der Mittelwerte

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}}$$

- Faustregel: Stichprobenumfänge  $m, n > 30$



# Differenz von Erwartungswerten bei unabhängigen Stichproben

## Annahmebereich

Für die beiden einseitigen Tests und den zweiseitigen Test auf die Differenz

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq d_0$$

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq d_0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y > d_0$$

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq d_0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y < d_0$$

ist der Annahmebereich

mit  $d_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s$

$$]-\infty, d_0 + z_{1-\alpha} \cdot s]$$

$$[d_0 - z_{1-\alpha} \cdot s, \infty[$$

$$s = \sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}$$

# Beispiel: Radio-Hördauer Ost-West

---

- Hören Personen in den alten Bundesländern im Schnitt mehr Radio?  
 $X$  : Hördauer in den alten Bundesländern,  
 $Y$  : Radiodauer in den neuen Bundesländern

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq 0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0$$

- Befragung unter 253 Personen aus den alten Bundesländern und 932 Personen aus den neuen Bundesländern
  - **unverbundene Stichproben**  $X_1, \dots, X_{253}$  und  $Y_1, \dots, Y_{932}$
  - **Stichprobengrößen**  $m = 253, n = 932 > 30$
- **Durchschnittliche Hördauer:**  
11.4 h (Standardabweichung 8.4 h) in den alten Bundesländern  
9.5 h (Standardabweichung 8.4 h) in den neuen Bundesländern

# Beispiel: Radio-Hördauer Ost-West

- Signifikanzniveau:  $\alpha = 0,1$
- Differenz der Radio-Hördauer

$$\bar{X} - \bar{Y} = 11.4 - 9.5 = 1.9$$

- Annahmebereich

$$\begin{aligned}\bar{X} - \bar{Y} &\leq z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}} \\ &= z_{0.9} \cdot \sqrt{\frac{8.4^2}{932} + \frac{8.4^2}{253}} \\ &\approx 1.28 \cdot 0.65 \\ &\approx 0.83\end{aligned}$$

- $H_0$  wird abgelehnt, Personen aus den alten Bundesländern hören signifikant länger Radio.

# Doppelter $t$ -Test auf die Erwartungswertdifferenz bei unabhängigen Stichproben

---

- 1 Vergleich zweier Mittelwerte
- 2  $X$  und  $Y$  sind zwei Größen mit Erwartungswerten  $\mu_X$  und  $\mu_Y$   
 $X$  und  $Y$  sind **normalverteilt**.
- 3  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$   
 $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$
- 4 Testgröße: Normierte Differenz der Mittelwerte

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}}$$

# Doppelter $t$ -Test auf die Erwartungswertdifferenz bei unabhängigen Stichproben

5

$$p\text{-Wert} = 2 \cdot [1 - F_{t;k}(|T|)]$$

$F_{t;n-1}$  ist die Verteilungsfunktion der  $t$ -Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden

$$k = \frac{\left(\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1} \cdot \left(\frac{s_X^2}{m}\right)^2 + \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{s_Y^2}{n}\right)^2}$$

Ablehnung für

$$|T| > t_{1-\alpha/2}^k$$

$t_{1-\alpha/2}^k$  ist das  $(1-\alpha/2)$  - Quantil der  $t^{n-1}$  - Verteilung



# Tests auf Erwartungswertdifferenz bei abhängigen Stichproben

---

① Gegeben ist eine verbundene Stichprobe  
 $X_1, \dots, X_n$  und  $Y_1, \dots, Y_n$

② Bilde die Differenz

$$D_i = X_i - Y_i \quad i = 1, \dots, n$$

③ Führe einen Test auf den Erwartungswert von  $D$  durch

- $n > 30 \rightarrow$  Gauß-Test
- $D$  normalverteilt  $\rightarrow t$ -Test



# Der Wilcoxon Test für unabhängige Stichproben

Test ist identisch mit dem Mann-Whitney-U-Test

- 1 Unterschied in der Lage zweier Verteilungen
- 2  $X$  und  $Y$  sind zwei Größen mit Medianen  $med_X$  und  $med_Y$
- 3  $H_0 : med_X = med_Y$  vs.  $H_1 : med_X \neq med_Y$
- 4 Testgröße Gegeben zwei unabhängige Stichproben  $X_i$  und  $Y_j$   
**Grundidee:** Betrachte die Ränge aus allen Beobachtungen  $X_i$  und  $Y_j$  und bezeichne diese mit  $rg(X_i)$  und  $rg(Y_j)$ , z.B.  
 $X_1 = 3, X_2 = 5, Y_1 = 6, Y_2 = 1, Y_3 = 4 \Rightarrow$   
 $rg(X_1) = 2, rg(X_2) = 4, rg(Y_1) = 5, rg(Y_2) = 1, rg(Y_3) = 3$

$$T = \sum_{i=1}^m rg(X_i)$$

Die exakte Verteilung von  $T$  kann berechnet werden. Für hinreichend große  $n$  und  $m$  kann sie durch eine NV approximiert werden. Ablehnung von  $H_0$  für große und kleine  $T$ .

- 1 Sind zwei binäre Zufallsgrößen unabhängig? Unterscheiden sich zwei Anteile?
- 2 Zwei Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  mit  $k$  bzw.  $l$  Ausprägungen

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$$

$$p_{i\bullet} = P(X = i) \quad p_{\bullet j} = P(Y = j)$$

- 3 Hypothesen:

$H_0$  :  $X$  und  $Y$  sind stochastisch unabhängig

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j} \text{ für alle } i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$$

$H_1$  :  $X$  und  $Y$  sind stochastisch abhängig

$$p_{ij} \neq p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j} \text{ für mindestens eine } ij\text{-Kombination}$$

# $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest

---

- 4 Prüfgröße:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- 5 Verteilung :

$$\chi^2 \sim \chi_{(k-1)(l-1)}^2$$

Annahmebereich

$$\chi^2 \leq c_{1-\alpha, (k-1)(l-1)}$$

Dabei ist  $c_{1-\alpha, (k-1)(l-1)}$  das

- $(1 - \alpha)$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung
- mit  $(k - 1) \cdot (l - 1)$  Freiheitsgraden.

# Beispiel

$$e_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$$

Fußball Geschlecht \	ja	nein	Summe
m	87	10	97
w	23	31	54
Summe	110	41	151

Erwartete Besetzungszahlen bei Unabhängigkeit

	ja (j=1)	nein (j=2)
m (i=1)	$\frac{97 \cdot 110}{151} \approx 71$	$\frac{97 \cdot 41}{151} \approx 26$
w (i=2)	$\frac{54 \cdot 110}{151} \approx 39$	$\frac{54 \cdot 41}{151} \approx 15$

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \\ &\approx \frac{(87 - 71)^2}{71} + \frac{(10 - 26)^2}{26} + \frac{(23 - 39)^2}{39} + \frac{(31 - 15)^2}{15} \\ &\approx 37.09\end{aligned}$$

# Beispiel

---

- Signifikanzniveau:  $\alpha = 0.01$
- Faustregel gültig?  
Besetzungszahlen  $n_{ij} \geq 5$
- Bestimmung der Freiheitsgrade:  $k = l = 2$

$$\text{Freiheitsgrade} = (k - 1) \cdot (l - 1) = (2 - 1) \cdot (2 - 1) = 1$$

$$q_{1-0.01; (2-1)(2-1)} = q_{0.99; 1} \approx 6,63$$

- $H_0$  wird abgelehnt

# Unabhängigkeit und Differenz von Anteilen

---

Die beide Fragen:

- Gibt es Unterschiede in den Anteilen von  $Y = 1$  zweier Gruppen ?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen Gruppen-Zugehörigkeit und einem binären Merkmal  $Y$  ?

sind äquivalent.



## Voraussetzungen:

- $X$  und  $Y$  sind zwei Bernoulli-Größen mit

$$p_X = P(X = 1)$$

$$p_Y = P(Y = 1)$$

- $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  **abhängige, verbundene** Stichproben
- Absolute Häufigkeiten werden in einer Kontingenztafel festgehalten

	Y=0	Y=1
X=0	$n_{11}$	$n_{12}$
X=1	$n_{21}$	$n_{22}$

Hier kann der  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest angewendet werden  
Für kleine Stichproben: Fisher Test



- Konstruktion von statistischen Tests verläuft nach einfachen Prinzipien
- Hervorragende Übersicht und Darstellung in Fahrmeier et al. (2016)
- Viele weitere Tests vorhanden
- Immer Angabe von Schätzern und Konfidenzintervallen (nicht nur p-Werte!)