



Vorlesung: Statistik II für Wirtschaftswissenschaft

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017



- 1 Einführung
- 2 Wahrscheinlichkeit: Definition und Interpretation
- 3 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
- 4 Zufallsgrößen
- 5 Spezielle Zufallsgrößen
- 6 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 7 Genzwertsätze
- 8 Statistische Inferenz: Punktschätzer
- 9 Statistische Inferenz: Konfidenzintervalle
- 10 Statistische Inferenz: Statistische Tests
- 11 Spezielle statistische Tests

Konstruktion von statistischen Tests

- 1 Forschungshypothese
- 2 Operationalisierung über die zu beobachtende Zufallsvariable X und deren Parameter
- 3 Formulierung von H_0 typischerweise als Gegenteil der Forschungshypothese und H_1
- 4 Konstruktion bzw. Wahl einer geeigneten Testgröße $T(X) = T(X_1, \dots, X_n)$ als Funktion der erhobenen Daten. Die Testgröße beinhaltet die Information der Daten bezüglich H_0 .
- 5 Aus der Verteilung von $T(X)$ unter der Nullhypothese erhält man Ablehnbereich bzw. p -Wert
- 6 Entscheidungsregel: H_0 ablehnen, falls Testgröße im Ablehnbereich bzw. p – Wert $< \alpha$

Typen von Tests

- Ein-Stichproben-Fall vs. Zwei- oder Mehr-Stichproben-Fall
- Parametrisch vs. Non-Parametrisch
- Lageparameter, Verteilungen, Andere Parameter



Test auf den Erwartungswert

- Wir interessieren uns für den Erwartungswert μ einer metrischen Zufallsgröße.
Beispiele: Alter, Einkommen, Körpergröße, Scorewert ...
- Wir können einseitige oder zweiseitige Hypothesen formulieren.
- Beispiele
 - Der Mittelwert der Länge eines Teils in der Produktion liegt bei 12.50 cm
 - Der Blutdruck einer Person wird durch eine Intervention niedriger



Zweiseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert μ

Voraussetzung: Stichprobenumfang n genügend groß (Faustregel $n > 30$)

- 2 X Zufallsgröße mit Erwartungswert μ .
- 3 Hypothese über μ :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- 4 Testgröße: Normierter Mittelwert in der Stichprobe X_1, \dots, X_n .

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Bezeichnung für T: t-Wert oder z-Wert

Zweiseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert μ

- 5 (Approximative) Verteilung von T unter H_0

$$T \sim N(0, 1)$$

- 6 Testentscheidung :

$$p\text{-Wert} = 2 \cdot [1 - \Phi(|T|)] = 2 \cdot \left[1 - \Phi \left(|\bar{X} - \mu_0| / \sqrt{\frac{S^2}{n}} \right) \right]$$

Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
Ablehnung für

$$|T| > z_{1-\alpha/2}$$

$z_{1-\alpha/2}$ ist das $(1-\alpha/2)$ - Quantil der Standardnormalverteilung

Einseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert μ

Voraussetzung: Stichprobenumfang n genügend groß (Faustregel $n > 30$)

- 2 X Zufallsgröße mit Erwartungswert μ .
- 3 Hypothese über μ :

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

- 4 Testgröße: Normierter Mittelwert in der Stichprobe X_1, \dots, X_n .

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Bezeichnung für T: t-Wert oder z-Wert

Einseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert μ

- 5 (Approximative) Verteilung von T unter H_0

$$T \sim N(0, 1)$$

- 6 Testentscheidung :

$$p\text{-Wert} = [1 - \Phi(T)] = \left[1 - \Phi \left((\bar{X} - \mu_0) / \sqrt{\frac{S^2}{n}} \right) \right]$$

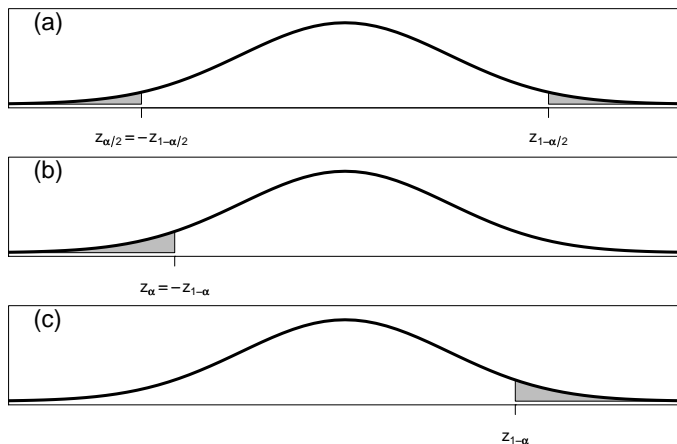
Φ ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung
Ablehnung für

$$|T| > z_{1-\alpha}$$

$z_{1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$ - Quantil der Standardnormalverteilung

Ablehnbereich einfacher Gauss-Test

Graphisch dargestellt liegt der kritische Bereich für die unterschiedlichen Fälle an den markierten Enden:



Wird bei kleineren Stichproben verwendet.
Voraussetzung: X annähernd normalverteilt

- 1 X Zufallsgröße mit Erwartungswert μ .
- 2 Hypothese über μ :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- 3 Testgröße: Normierter Mittelwert in der Stichprobe X_1, \dots, X_n .

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Bezeichnung für T : t-Wert oder z-Wert

- 4 Verteilung von T unter H_0

$$T \sim t^{n-1}$$

t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden

- 5 Testentscheidung :

$$p\text{-Wert} = 2 \cdot [1 - F_{t;n-1}(|T|)]$$

$F_{t;n-1}$ ist die Verteilungsfunktion der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden
Ablehnung für

$$|T| > t_{1-\alpha/2}^{n-1}$$

$t_{1-\alpha/2}^{n-1}$ ist das $(1-\alpha/2)$ - Quantil der t^{n-1} - Verteilung

Veränderung des Blutdruck nach einer Intervention

- Nullhypothese: Die Blutdruckdifferenz ist 0.

$$H_0 : \mu = 0$$

$$H_1 : \mu \neq 0$$

- Testgröße: Durchschnittliche Blutdruckdifferenz
- $n = 22 \rightarrow$ zweiseitiger **t-Test**



Ergebnisse mit R

data: bdd

$t = -1.8237$, $df = 21$, $p\text{-value} = 0.08246$

Alternative hypothesis: true mean is not equal to 0

95 percent confidence interval:

-5.9034075 0.3870439

sample estimates:

mean of x

-2.758182



Non-Parametrischer Test zur Lage einer Verteilung

- 2 Betrachtet wird der Median einer Verteilung von beliebiger Struktur
- 3 $H_0 : x_{med} = \delta_0$
 $H_1 : x_{med} \neq \delta$
- 4 $T =$ Anzahl der Werte $< \delta_0$
- 5 $T \sim B(n; 0.5)$
- 6 Testentscheidung

$$p - \text{Wert} = \min(2 \cdot (1 - F_{B(n;0.5)}(T - 1)); 2 \cdot (F_{B(n;0.5)}(T)))$$

$F_{B(n;0.5)}$: Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

Motivation

Wir wollen prüfen ob eine Zufallsgröße einer bestimmten Verteilung genügt.

Beispiel: Der Würfel ist fair (alle Zahlen habe die Wahrscheinlichkeit $1/6$)

Die Testgröße wird so konstruiert, dass sie die Abweichungen der unter H_0 erwarteten von den tatsächlich beobachteten absoluten Häufigkeiten misst.

Der Test wird zunächst für kategoriale Größen definiert. Bei stetigem Größen kann der Test angewendet werden, wenn die Stichprobe \mathbf{X} in k (oft willkürlich gewählten) Klassen eingeteilt wird..

- 1 Die diskrete Zufallsgröße X mit möglichen Werten $1, \dots, k$ hat eine bestimmte Verteilung $F_0(x)$
- 2 $H_0 : P(X = i) = \pi_i$
 $H_1 : P(X = i) \neq \pi_i$ für mindestens ein i
- 3 Konstruktion der Testgröße

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i}$$

wobei

- N_i die absolute Häufigkeit der Stichprobe \mathbf{X} für die i -te Klasse angibt
- π_i die Wahrscheinlichkeit, dass X in die Klasse i fällt
- n die Größe der Stichprobe beinhaltet.

4 Verteilung der Testgröße

$$T_{H_0} \sim \chi_{k-1}^2$$

Die χ^2 -Verteilung gilt nur asymptotisch und ist zumeist hinreichend genau, wenn höchstens $1/5$ der erwarteten Klassenbesetzungen $n\pi_i$ kleiner als 5 und alle $n\pi_i$ größer als 1 sind.

- ## 5 Testentscheidung
- Kritischer Bereich: $K = (c_{k-1; 1-\alpha}; \infty)$

Approximativer Test auf Erwartungswert-Differenz bei unabhängigen Stichproben

Voraussetzungen:

- X und Y sind zwei Größen mit Erwartungswerten μ_X und μ_Y
- X_1, \dots, X_m und Y_1, \dots, Y_n **unabhängige** Stichproben
- Testgröße: standardisierte Differenz der Mittelwerte

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}}$$

- Faustregel: Stichprobenumfänge $m, n > 30$

Differenz von Erwartungswerten bei unabhängigen Stichproben

Annahmebereich

Für die beiden einseitigen Tests und den zweiseitigen Test auf die Differenz

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq d_0$$

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq d_0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y > d_0$$

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq d_0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y < d_0$$

ist der Annahmebereich

mit $d_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s$ $] -\infty, d_0 + z_{1-\alpha} \cdot s]$ $[d_0 - z_{1-\alpha} \cdot s, \infty[$

$$s = \sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}$$

Beispiel: Radio-Hördauer Ost-West

- Hören Personen in den alten Bundesländern im Schnitt mehr Radio?
 X : Hördauer in den alten Bundesländern,
 Y : Radiodauer in den neuen Bundesländern

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq 0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0$$

- Befragung unter 253 Personen aus den alten Bundesländern und 932 Personen aus den neuen Bundesländern
 - **unverbundene Stichproben** X_1, \dots, X_{253} und Y_1, \dots, Y_{932}
 - **Stichprobengrößen** $m = 253, n = 932 > 30$
- **Durchschnittliche Hördauer:**
11.4 h (Standardabweichung 8.4 h) in den alten Bundesländern
9.5 h (Standardabweichung 8.4 h) in den neuen Bundesländern

Beispiel: Radio-Hördauer Ost-West

- Signifikanzniveau: $\alpha = 0,1$
- Differenz der Radio-Hördauer

$$\bar{X} - \bar{Y} = 11.4 - 9.5 = 1.9$$

- Annahmereich

$$\begin{aligned}\bar{X} - \bar{Y} &\leq z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}} \\ &= z_{0.9} \cdot \sqrt{\frac{8.4^2}{932} + \frac{8.4^2}{253}} \\ &\approx 1.28 \cdot 0.65 \\ &\approx 0.83\end{aligned}$$

- H_0 wird abgelehnt, Personen aus den alten Bundesländern hören signifikant länger Radio.

Doppelter t -Test auf die Erwartungswertdifferenz bei unabhängigen Stichproben

- 1 Vergleich zweier Mittelwerte
- 2 X und Y sind zwei Größen mit Erwartungswerten μ_X und μ_Y
 X und Y sind **normalverteilt**.
- 3 $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
 $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$
- 4 Testgröße: Normierte Differenz der Mittelwerte

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}}$$

Doppelter t -Test auf die Erwartungswertdifferenz bei unabhängigen Stichproben

5

$$p\text{-Wert} = 2 \cdot [1 - F_{t;k}(|T|)]$$

$F_{t;n-1}$ ist die Verteilungsfunktion der t -Verteilung mit k Freiheitsgraden

$$k = \frac{\left(\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1} \cdot \left(\frac{s_X^2}{m}\right)^2 + \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{s_Y^2}{n}\right)^2}$$

Ablehnung für

$$|T| > t_{1-\alpha/2}^k$$

$t_{1-\alpha/2}^k$ ist das $(1-\alpha/2)$ - Quantil der t^{n-1} - Verteilung

Tests auf Erwartungswertdifferenz bei abhängigen Stichproben

① Gegeben ist eine verbundene Stichprobe
 X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_n

② Bilde die Differenz

$$D_i = X_i - Y_i \quad i = 1, \dots, n$$

③ Führe einen Test auf den Erwartungswert von D durch

- $n > 30 \rightarrow$ Gauß-Test
- D normalverteilt $\rightarrow t$ -Test

Der Wilcoxon Test für unabhängige Stichproben

Test ist identisch mit dem Mann-Whitney-U-Test

- 1 Unterschied in der Lage zweier Verteilungen
- 2 X und Y sind zwei Größen mit Medianen med_X und med_Y
- 3 $H_0 : med_X = med_Y$ vs. $H_1 : med_X \neq med_Y$
- 4 Testgröße Gegeben zwei unabhängige Stichproben X_i und Y_j
Grundidee: Betrachte die Ränge aus allen Beobachtungen X_i und Y_j und bezeichne diese mit $rg(X_i)$ und $rg(Y_j)$, z.B.
 $X_1 = 3, X_2 = 5, Y_1 = 6, Y_2 = 1, Y_3 = 4 \Rightarrow$
 $rg(X_1) = 2, rg(X_2) = 4, rg(Y_1) = 5, rg(Y_2) = 1, rg(Y_3) = 3$

$$T = \sum_{i=1}^m rg(X_i)$$

Die exakte Verteilung von T kann berechnet werden. Für hinreichend große n und m kann sie durch eine NV approximiert werden. Ablehnung von H_0 für große und kleine T .

- 1 Sind zwei binäre Zufallsgrößen unabhängig? Unterscheiden sich zwei Anteile?
- 2 Zwei Zufallsgrößen X und Y mit k bzw. l Ausprägungen

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$$

$$p_{i\bullet} = P(X = i) \quad p_{\bullet j} = P(Y = j)$$

- 3 Hypothesen:

H_0 : X und Y sind stochastisch unabhängig

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j} \text{ für alle } i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$$

H_1 : X und Y sind stochastisch abhängig

$$p_{ij} \neq p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j} \text{ für mindestens eine } ij\text{-Kombination}$$

χ^2 -Unabhängigkeitstest

- 4 Prüfgröße:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- 5 Verteilung :

$$\chi^2 \sim \chi_{(k-1)(l-1)}^2$$

Annahmereich

$$\chi^2 \leq c_{1-\alpha, (k-1)(l-1)}$$

Dabei ist $c_{1-\alpha, (k-1)(l-1)}$ das

- $(1 - \alpha)$ -Quantil der χ^2 -Verteilung
- mit $(k - 1) \cdot (l - 1)$ Freiheitsgraden.

Beispiel

$$e_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$$

Fußball Geschlecht \	ja	nein	Summe
m	87	10	97
w	23	31	54
Summe	110	41	151

Erwartete Besetzungszahlen bei Unabhängigkeit

	ja (j=1)	nein (j=2)
m (i=1)	$\frac{97 \cdot 110}{151} \approx 71$	$\frac{97 \cdot 41}{151} \approx 26$
w (i=2)	$\frac{54 \cdot 110}{151} \approx 39$	$\frac{54 \cdot 41}{151} \approx 15$

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \\ &\approx \frac{(87 - 71)^2}{71} + \frac{(10 - 26)^2}{26} + \frac{(23 - 39)^2}{39} + \frac{(31 - 15)^2}{15} \\ &\approx 37.09\end{aligned}$$

Beispiel

- Signifikanzniveau: $\alpha = 0.01$
- Faustregel gültig?
Besetzungszahlen $n_{ij} \geq 5$
- Bestimmung der Freiheitsgrade: $k = l = 2$

$$\text{Freiheitsgrade} = (k - 1) \cdot (l - 1) = (2 - 1) \cdot (2 - 1) = 1$$

$$q_{1-0.01; (2-1)(2-1)} = q_{0.99; 1} \approx 6,63$$

- H_0 wird abgelehnt

Unabhängigkeit und Differenz von Anteilen

Die beide Fragen:

- Gibt es Unterschiede in den Anteilen von $Y = 1$ zweier Gruppen ?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen Gruppen-Zugehörigkeit und einem binären Merkmal Y ?

sind äquivalent.



Voraussetzungen:

- X und Y sind zwei Bernoulli-Größen mit

$$p_X = P(X = 1)$$

$$p_Y = P(Y = 1)$$

- $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ **abhängige, verbundene** Stichproben
- Absolute Häufigkeiten werden in einer Kontingenztafel festgehalten

	Y=0	Y=1
X=0	n_{11}	n_{12}
X=1	n_{21}	n_{22}

Hier kann der χ^2 -Unabhängigkeitstest angewendet werden
Für kleine Stichproben: Fisher Test

- Konstruktion von statistischen Tests verläuft nach einfachen Prinzipien
- Hervorragende Übersicht und Darstellung in Fahrmeier et al. (2016)
- Viele weitere Tests vorhanden
- Immer Angabe von Schätzern und Konfidenzintervallen (nicht nur p-Werte!)