Aufgabe 1: Im Folgenden wird das Zufallsexperiment „Zweifacher Münzwurf" mit einer fairen Münze betrachtet.

a) Geben Sie den zugrundeliegenden Ergebnisraum Ω sowie die Mächtigkeit von Ω an.

b) Veranschaulichen Sie, wie sich die Zufallsvariable X: „Anzahl von Kopf" als Abbildung auffassen lässt.

c) Bestimmen und zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ und berechnen sie anschließend die Werte von $F(x)$ für $x = -1, 1, 3$. Zeichnen Sie diese anschließend.

e) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

f) Das Zufallsexperiment „Zweifacher Münzwurf" wird nun 100 mal wiederholt. Dabei nahm die Zufallsvariable X 21 mal den Wert 0 an. 48 mal wurde der Wert 1 realisiert. Bei den übrigen 31 Versuchen lieferte der zweifache Münzwurf 2 Kopfwürfe. Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Varianz dieser Realisationen.

g) Vergleichen und kommentieren Sie die Vorgehensweisen aus den Teilaufgaben e) und f).

Aufgabe 2: Die Wahrscheinlichkeit X für den Ausfall eines Bauteils sei exponentialverteilt mit folgender Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-0.4 \cdot x) & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

Aufgabe 3: Sei X eine stetige Zufallsvariable. Als Dichtefunktion von X soll folgende Funktion dienen:

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Für welchen Wert der Konstanten c ist $f(x)$ eine Dichtefunktion?

b) Setzen Sie den entsprechenden Wert für c ein und bestimmen Sie $P(X \geq 2)$.

c) Bestimmen Sie F(x).

Aufgabe 4:
Die Zufallsvariable X aus A1 sei nun X_1 und die Zufallsvariable X aus A2 sei X_2. Diese beiden Zufallsvariablen werden als unabhängig angenommen. Des Weiteren sei definiert:
$Y = 3 \cdot X_1$
$Z = X_3 + X_4 + X_5$,
wobei X_3, X_4 und X_5 jeweils voneinander unabhängige Wiederholungen von X_1 sind.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(Y)$ und die Varianz $Var(Y)$.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(Y + X_2)$ und die Varianz $Var(Y + X_2)$.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(Z)$ und die Varianz $Var(Z)$.
Gibt es Unterschiede zu $E(Y)$ und $Var(Y)$? Wie erklären Sie sich diese?